线性代数
第一章：矩阵及其运算

宿州学院　数学与统计学院

目录

1. 1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

③将矩阵的某一行乘一个数加到另一行.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

③将矩阵的某一行乘一个数加到另一行.

称这三种常用的变形为矩阵的初等行变换.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

③将矩阵的某一行乘一个数加到另一行.

称这三种常用的变形为矩阵的初等行变换.

矩阵经过上述三种初等行变换，可以化为什么形式呢？

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

③将矩阵的某一行乘一个数加到另一行.

称这三种常用的变形为矩阵的初等行变换.

矩阵经过上述三种初等行变换，可以化为什么形式呢？

矩阵经过初等行变换可以化为阶梯形矩阵，且可以进一步化为规范阶梯形矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

矩阵是一个由$m \times n$ 个数组成的数表，可以按照某种方式对其进行需要的变形.常用的变形方式主要有：

①交换矩阵的某两行；

②将某一行的所有元素乘以同一个非零数；

③将矩阵的某一行乘一个数加到另一行.

称这三种常用的变形为矩阵的初等行变换.

矩阵经过上述三种初等行变换，可以化为什么形式呢？

矩阵经过初等行变换可以化为阶梯形矩阵，且可以进一步化为规范阶梯形矩阵.

下面通过实例，来体会矩阵的初等行变换.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行

第1行乘(-1)加到第3行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\0&-2&2&-2&6\\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\0&-2&2&-2&6\\0&0&0&-2&-8\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.7 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$，对$A$实施初等行变换，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\2&1&-1&1&5\\1&-1&3&-1&4\\1&1&1&-1&2\end{pmatrix}$$

第1行乘(-2)加到第2行
第1行乘(-1)加到第3行
第1行乘(-1)加到第4行

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\0&-2&2&-2&6\\0&0&0&-2&-8\end{pmatrix}$$

第2行乘(-2)加到第3行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{第3行乘}\tfrac{1}{8}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15\\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8\end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15\\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$

第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\0&0&8&0&24\\0&0&0&-2&-8\end{pmatrix}\quad \text{第3行乘}\tfrac{1}{8}\quad\text{第4行乘}(-\tfrac{1}{2})$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&-1&-3&-1&-15\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\quad \text{第4行乘(-1)加到第1行}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$

第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行

第4行加到第2行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行
第4行加到第2行

$$\to \Bigg(\quad$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行
第4行加到第2行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$

第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行

第4行加到第2行

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$

第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行

第4行加到第2行

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行
第4行加到第2行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第3行乘(-1)加到第1行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{8}$
第4行乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第4行乘(-1)加到第1行
第4行加到第2行

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第3行乘(-1)加到第1行
第3行乘3加到第2行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \left(\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ 第2行加到第1行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行
第2行乘(-1)

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行

第2行乘(-1)

$$\rightarrow \left(\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行

第2行乘(-1)

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行

第2行乘(-1)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行

第2行乘(-1)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

第2行加到第1行

第2行乘(-1)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

单位矩阵是特殊的规范阶梯形矩阵，什么样的矩阵经过初等行变换可以化为单位矩阵呢？

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第1行乘(-1)加到第3行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\ & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行}\quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\ & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{第3行乘}(\tfrac{1}{2})$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{第3行乘}(\tfrac{1}{2})\ \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\ & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{第3行乘}(\tfrac{1}{2}) \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第1行乘(-1)加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行}\ \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{第3行乘}\left(\tfrac{1}{2}\right)\ \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{第3行乘(-1)加到第2行}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \quad \text{第1行乘(-1)加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \quad \text{第3行乘}(\tfrac{1}{2}) \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{第3行乘(-1)加到第2行} \quad \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

再看一个例子.

例1.8 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，将$A$化为规范阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\ \text{第1行乘(-1)加到第3行}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\text{第2行加到第3行}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\ \text{第3行乘}\left(\tfrac{1}{2}\right)\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\ \text{第3行乘(-1)加到第2行}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\text{第2行乘(-1)加到第1行} \to \left(\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵A经过初等行变换化为单位矩阵(规范阶梯形矩阵).而矩阵A也是例1.6中的可逆矩阵.

问题是:

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵A经过初等行变换化为单位矩阵(规范阶梯形矩阵).而矩阵A也是例1.6中的可逆矩阵.

问题是：可逆矩阵经过初等行变换是否都可以化为单位矩阵？

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵A经过初等行变换化为单位矩阵(规范阶梯形矩阵).而矩阵A也是例1.6中的可逆矩阵.

问题是：可逆矩阵经过初等行变换是否都可以化为单位矩阵？ 经过初等行变换可以化为单位矩阵的矩阵是否一定可逆？

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵A经过初等行变换化为单位矩阵(规范阶梯形矩阵).而矩阵A也是例1.6中的可逆矩阵.

问题是：可逆矩阵经过初等行变换是否都可以化为单位矩阵？ 经过初等行变换可以化为单位矩阵的矩阵是否一定可逆?矩阵的求逆与初等行变换之间有什么关系?

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\text{第2行乘(-1)加到第1行} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵A经过初等行变换化为单位矩阵(规范阶梯形矩阵).而矩阵A也是例1.6中的可逆矩阵.

问题是：可逆矩阵经过初等行变换是否都可以化为单位矩阵？ 经过初等行变换可以化为单位矩阵的矩阵是否一定可逆?矩阵的求逆与初等行变换之间有什么关系?

下面，就解决这些问题.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.如

$$P(1,3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.如

$$P(1,3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.如

$$P(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(2)将n 阶单位矩阵的第i行乘上非零数c，得到的矩阵记作$P(i(c))$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.如

$$P(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(2)将n 阶单位矩阵的第i行乘上非零数c，得到的矩阵记作$P(i(c))$.如

$$P(2(-1))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.9 (1)将n阶单位矩阵的第i行与第j行交换，得到的矩阵记作$P(i,j)$.如

$$P(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(2)将n 阶单位矩阵的第i行乘上非零数c，得到的矩阵记作$P(i(c))$.如

$$P(2(-1))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P(3(\frac{1}{3}))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

(3)将n阶单位矩阵的第i行乘数k加到第j行，得到的矩阵记作$P(i(k),j)$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

(3)将n阶单位矩阵的第i行乘数k加到第j行，得到的矩阵记作$P(i(k),j)$.如

$$P(2(-2),3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

(3)将n阶单位矩阵的第i行乘数k加到第j行，得到的矩阵记作$P(i(k),j)$.如

$$P(2(-2),3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P(4(-3),1)=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \Bigg($$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{31} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix}a_{31}&a_{32}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{ccccc}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&\\ &&&&\\ &&&&\\ &&&&\end{array}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

观察上述初等矩阵与4×5的乘积.

$$P(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

积矩阵$P(1,3)A$ 是交换矩阵A的第1行和第3行所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

积矩阵$P(2,3)A$是交换矩阵A的第2行和第3行所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-1))A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\-a_{21}&-a_{22}&-a_{23}&-a_{24}&-a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

积矩阵$P(2(-1))A$是将矩阵A的第2行乘(-1)所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \frac{1}{3}a_{31} & \frac{1}{3}a_{32} & \frac{1}{3}a_{33} & \frac{1}{3}a_{34} & \frac{1}{3}a_{35} \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \frac{1}{3}a_{31} & \frac{1}{3}a_{32} & \frac{1}{3}a_{33} & \frac{1}{3}a_{34} & \frac{1}{3}a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(3(\frac{1}{3}))A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \frac{1}{3}a_{31} & \frac{1}{3}a_{32} & \frac{1}{3}a_{33} & \frac{1}{3}a_{34} & \frac{1}{3}a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

积矩阵$P(3(\frac{1}{3}))A$是将矩阵A的第3行乘$\frac{1}{3}$所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

$$= \Bigg($$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{ccccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}-2a_{21}&a_{32}-2a_{22}&a_{33}-2a_{23}&a_{34}-2a_{24}&a_{35}-2a_{25}\\ \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}-2a_{21}&a_{32}-2a_{22}&a_{33}-2a_{23}&a_{34}-2a_{24}&a_{35}-2a_{25}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(2(-2),3)A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}-2a_{21}&a_{32}-2a_{22}&a_{33}-2a_{23}&a_{34}-2a_{24}&a_{35}-2a_{25}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

积矩阵$P(2(-2),3)A$是将矩阵A的第2行乘(-2)加到第3行所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(4(-3),1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(4(-3),1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(4(-3),1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{41}&a_{12}-3a_{42}&a_{13}-3a_{43}&a_{14}-3a_{44}&a_{15}-3a_{45}\\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(4(-3),1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{41}&a_{12}-3a_{42}&a_{13}-3a_{43}&a_{14}-3a_{44}&a_{15}-3a_{45}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$P(4(-3),1)A=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{41}&a_{12}-3a_{42}&a_{13}-3a_{43}&a_{14}-3a_{44}&a_{15}-3a_{45}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\end{pmatrix}$$

积矩阵$P(4(-3),1)A$是将矩阵A的第4行乘(-3)加到第1行所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是:

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j),P(i(c)),P(i(k),j)$，积矩阵就是对A实施同样的初等行变换所得的矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j), P(i(c)), P(i(k),j)$，积矩阵就是对$A$实施同样的初等行变换所得的矩阵.

单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j), P(i(c)), P(i(k),j)$，积矩阵就是对$A$实施同样的初等行变换所得的矩阵.

单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有三种类型：

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j), P(i(c)), P(i(k),j)$，积矩阵就是对$A$实施同样的初等行变换所得的矩阵.

单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有三种类型：

①$P(i,j)$(交换单位矩阵的第i行和第j 行)；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j),P(i(c)),P(i(k),j)$，积矩阵就是对A实施同样的初等行变换所得的矩阵.

单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有三种类型：

①$P(i,j)$(交换单位矩阵的第i行和第j 行)；

②$P(i(c))$(将单位矩阵的第i行乘非零数c)；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

结论是：

$P(i,j)A$ 就是交换矩阵A的第i 行和第j行所得的矩阵；

$P(i(c))A$ 就是将矩阵A的第i行乘数c所得的矩阵；

$P(i(k),j)$ 就是将矩阵A的第i行乘数k加到第j行所得的矩阵.即，

在矩阵A的左侧分别乘上$P(i,j),P(i(c)),P(i(k),j)$，积矩阵就是对A实施同样的初等行变换所得的矩阵.

单位矩阵经过一次初等行变换所得的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵有三种类型：

①$P(i,j)$(交换单位矩阵的第i行和第j 行)；

②$P(i(c))$(将单位矩阵的第i行乘非零数c)；

③$P(i(k),j)$ (将单位矩阵的第i行乘数k加到第j行).

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，对A实施初等行变换就相当于在A的左侧乘上相应的初等矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，对A实施初等行变换就相当于在A的左侧乘上相应的初等矩阵. 即，

交换A的第i行和第j 行，就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i,j)$ ；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，对A实施初等行变换就相当于在A的左侧乘上相应的初等矩阵. 即，

交换A的第i行和第j 行，就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i,j)$ ；

将矩阵A的第i行乘非零数c，就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i(c))$；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，对A实施初等行变换就相当于在A的左侧乘上相应的初等矩阵. 即，

交换A的第i行和第j 行，就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i,j)$ ；

将矩阵A的第i行乘非零数c，就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i(c))$；

将矩阵A的第i行乘数k 加到第j 行就相当于在A的左侧乘上m阶的矩阵$P(i(k),j)$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行　　　第2行加到第3行

$$P(1(-1),3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{2}$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{2}$

$$P(3(\tfrac{1}{2}))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{2}$

$$P(3(\tfrac{1}{2}))=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

第3行乘(-1)加到第2行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.10 比较例1.8中的初等行变换过程，其每一步初等行变换对应的初等矩阵分别为

第1行乘(-1)加到第3行

$$P(1(-1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

第2行加到第3行

$$P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

第3行乘$\frac{1}{2}$

$$P(3(\tfrac{1}{2}))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

第3行乘(-1)加到第2行

$$P(3(-1),2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

$$P(2(-1),1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

$$P(2(-1),1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

将这些初等矩阵按序左乘在矩阵A的左侧，有

$$P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\tfrac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)A=$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

$$P(2(-1),1)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

将这些初等矩阵按序左乘在矩阵A的左侧，有

$$P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\tfrac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)A=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}A$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

第2行乘(-1)加到第1行

$$P(2(-1),1)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

将这些初等矩阵按序左乘在矩阵A的左侧，有

$$P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\tfrac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)A=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}A=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

直接验证:

初等矩阵$P(i,j)$、 $P(i(c))$ 、$P(i(k),j)$ 都是可逆矩阵，且

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

直接验证:

初等矩阵$P(i,j)$、 $P(i(c))$ 、$P(i(k),j)$ 都是可逆矩阵，且

$$P^{-1}(i,j)=P(i,j),$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

直接验证:

初等矩阵$P(i,j)$、 $P(i(c))$ 、$P(i(k),j)$ 都是可逆矩阵，且

$$P^{-1}(i,j)=P(i,j),P^{-1}(i(c))=P(i(\frac{1}{c})),$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

直接验证:

初等矩阵$P(i,j)$、 $P(i(c))$ 、$P(i(k),j)$ 都是可逆矩阵，且

$$P^{-1}(i,j)=P(i,j),P^{-1}(i(c))=P(i(\frac{1}{c})),P^{-1}(i(k),j)=P(i(-k),j).$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

直接验证:

初等矩阵$P(i,j)$、 $P(i(c))$ 、$P(i(k),j)$ 都是可逆矩阵，且

$$P^{-1}(i,j)=P(i,j),P^{-1}(i(c))=P(i(\frac{1}{c})),P^{-1}(i(k),j)=P(i(-k),j).$$

即，初等矩阵都是可逆矩阵，且初等矩阵的逆矩阵也是同类型的初等矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$$

由乘法的结合律，则$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$ ，

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$$

由乘法的结合律，则$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$ ，

而可逆矩阵之积仍是可逆矩阵，所以A可逆，且

$$A^{-1} = (P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1})^{-1}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$$

由乘法的结合律，则$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$ ，

而可逆矩阵之积仍是可逆矩阵，所以A可逆，且

$$A^{-1} = (P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1})^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

假设矩阵A经过初等行变换化为了单位矩阵，由初等变换与初等矩阵的关系，则存在初等矩阵

$$P_1, P_2, \ldots, P_m \text{ 使得 } P_m \cdots P_2 P_1 A = I,$$

在$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$ 的两边依次左乘初等矩阵

$$P_m^{-1}, P_{m-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$$

由乘法的结合律，则$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$ ，

而可逆矩阵之积仍是可逆矩阵，所以A可逆，且

$$A^{-1} = (P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1})^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

所以，若矩阵A经初等行变换可以化为单位矩阵，则矩阵A 一定是可逆矩阵，且化矩阵A 为单位矩阵的初等行变换所对应的初等矩阵之积即为矩阵A 的逆矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

如在例1.10中，

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

如在例1.10中，

$$A^{-1} =$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

如在例1.10中，

$$A^{-1} = P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\frac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)$$

$$=$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

如在例1.10中，

$$A^{-1} = P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\frac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

如在例1.10中，

$$A^{-1}=P(2(-1),1)P(3(-1),2)P(3(\frac{1}{2}))P(2(1),3)P(1(-1),3)$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

事实上：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

事实上：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

事实上：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经初等行变换可以化为单位矩阵的矩阵一定是可逆矩阵，那么可逆矩阵是否一定可以经过初等行变换化为单位矩阵呢？

回答是肯定的。即，

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

事实上：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

经初等行变换可以化为单位矩阵的矩阵一定是可逆矩阵，那么可逆矩阵是否一定可以经过初等行变换化为单位矩阵呢？

回答是肯定的。即，

矩阵A可逆当且仅当A 经过初等行变换可以化为单位矩阵，且化A为单位矩阵的所有初等行变换对应的初等矩阵之积就是矩阵A的逆.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：设A是$n\times n$阶方阵，

① 单位矩阵写在A的右侧构造一个$n\times 2n$阶矩阵$(A\quad I)$；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：设A是$n\times n$阶方阵，

① 单位矩阵写在A的右侧构造一个$n\times 2n$阶矩阵$(A\quad I)$；

② 对$n\times 2n$阶矩阵$(A\quad I)$进行初等行变换；

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：设A是$n \times n$阶方阵，

① 单位矩阵写在A的右侧构造一个$n \times 2n$阶矩阵$(A \quad I)$；

② 对$n \times 2n$阶矩阵$(A \quad I)$进行初等行变换；

③ 若矩阵A可逆，则其左半部分可以化为单位矩阵，其右半部分就是化A为单位矩阵的所有初等行变换对应的初等矩阵之积，也就是A^{-1}.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：设A是$n \times n$阶方阵，

① 单位矩阵写在A的右侧构造一个$n \times 2n$阶矩阵$(A \quad I)$；

② 对$n \times 2n$阶矩阵$(A \quad I)$进行初等行变换；

③ 若矩阵A可逆，则其左半部分可以化为单位矩阵，其右半部分就是化A为单位矩阵的所有初等行变换对应的初等矩阵之积，也就是A^{-1}.

即，A可逆，$(A \quad I) \xrightarrow{\text{初等行变换}}$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

对可逆矩阵A实施初等行变换，在将其化为单位矩阵的同时，若能将初等行变换对应的初等矩阵之积也求出来，即求出了A^{-1}.

求矩阵的逆的方法如下：设A是$n\times n$阶方阵，

① 单位矩阵写在A的右侧构造一个$n\times 2n$阶矩阵$(A\ \ I)$；

② 对$n\times 2n$阶矩阵$(A\ \ I)$进行初等行变换；

③ 若矩阵A可逆，则其左半部分可以化为单位矩阵，其右半部分就是化A为单位矩阵的所有初等行变换对应的初等矩阵之积，也就是A^{-1}.

即，A可逆，$(A\ \ I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I\ \ A^{-1})$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解 构作3×6矩阵

$$(A\ \ I)=$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解 构作3×6矩阵

$$(A\ \ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解 构作3×6矩阵

$$(A\ \ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.11 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求$A$的逆矩阵.

解 构作3×6矩阵

$$(A\ \ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.例1.8中没能保留下初等变换对应的初等矩阵之积，而例1.11 中却保留了初等行变换对应的初等矩阵的乘积，从而求得了A^{-1}.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.例1.8中没能保留下初等变换对应的初等矩阵之积，而例1.11 中却保留了初等行变换对应的初等矩阵的乘积，从而求得了A^{-1}.

例1.12 设$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-3&4&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&-1\\-2&3\\1&4\end{pmatrix}$，求矩阵$X$，使得$AX=B$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.例1.8中没能保留下初等变换对应的初等矩阵之积，而例1.11 中却保留了初等行变换对应的初等矩阵的乘积，从而求得了A^{-1}.

例1.12 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵$X$，使得$AX=B$.

解

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.例1.8中没能保留下初等变换对应的初等矩阵之积，而例1.11 中却保留了初等行变换对应的初等矩阵的乘积，从而求得了A^{-1}.

例1.12 设$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-3&4&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&-1\\-2&3\\1&4\end{pmatrix}$，求矩阵$X$，使得$AX=B$.

解 X是一个3×2矩阵.若A是可逆矩阵，则在$AX=B$两边同时左乘A^{-1}得，

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

例1.8与例1.11的初等行变换过程是一样的.例1.8中没能保留下初等变换对应的初等矩阵之积，而例1.11 中却保留了初等行变换对应的初等矩阵的乘积，从而求得了A^{-1}.

例1.12 设$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵$X$，使得$AX=B$.

解 X是一个3×2矩阵.若A是可逆矩阵，则在$AX=B$两边同时左乘A^{-1}得，

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,\ X=A^{-1}B.$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A \quad B)$：

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A\ \ B)$：

$$(A\ \ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A\ \ B)$：

$$(A\ \ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

对其实施初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A\ \ B)$：

$$(A\ \ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

对其实施初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵.

矩阵 $(A\ \ B)$中A对应的部分若可以化为单位矩阵，则A是可逆矩阵，且B对应的部分即化为矩阵$X=A^{-1}B$.

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A\ \ B)$：

$$(A\ \ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

对其实施初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵.

矩阵$(A\ \ B)$中A对应的部分若可以化为单位矩阵，则A是可逆矩阵，且B对应的部分即化为矩阵$X=A^{-1}B$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)\longrightarrow$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

为了求$A^{-1}B$，构作一个3×5阶矩阵$(A\ \ B)$：

$$(A\ \ B)=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

对其实施初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵.

矩阵 $(A\ \ B)$中A对应的部分若可以化为单位矩阵，则A是可逆矩阵，且B对应的部分即化为矩阵$X=A^{-1}B$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -35 & 49 & -24 \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -35 & 49 & -24 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -35 & 49 & -24 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right)$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -35 & 49 & -24 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{13}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right).$$

1.4 初等变换与初等矩阵、逆矩阵的求法

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 4 & -7 & 13 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -35 & 49 & -24 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{13}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{array}\right).\text{所以，} X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & \frac{13}{35} \\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{24}{35} \end{pmatrix}.$$

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com