线性代数

第一章：矩阵及其运算

宿州学院　数学与统计学院

目录

1.2 矩阵的关系和运算

在§1.1中，已经给出了矩阵的概念，并通过实例介绍了矩阵的“加法”和“乘法”，但作为数学课程，还必须给出矩阵运算的数学表达.

1.2 矩阵的关系和运算

在§1.1中，已经给出了矩阵的概念，并通过实例介绍了矩阵的“加法”和“乘法”，但作为数学课程，还必须给出矩阵运算的数学表达.

本节就从数学的角度给出矩阵运算的定义及其性质.

1.2 矩阵的关系和运算

在§1.1中，已经给出了矩阵的概念，并通过实例介绍了矩阵的“加法”和“乘法”，但作为数学课程，还必须给出矩阵运算的数学表达.

本节就从数学的角度给出矩阵运算的定义及其性质.

定义2.1(矩阵的相等)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$B=(b_{kl})_{s\times t}\in F^{s\times t}$，若其满足$m=s, n=t$，且$a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,\ldots,m(s); j=1,2,\ldots,n(t)$，

则称矩阵A, B**相等**，记作$A=B$

1.2 矩阵的关系和运算

在§1.1中，已经给出了矩阵的概念，并通过实例介绍了矩阵的“加法”和“乘法”，但作为数学课程，还必须给出矩阵运算的数学表达.

本节就从数学的角度给出矩阵运算的定义及其性质.

定义2.1(矩阵的相等)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$B=(b_{kl})_{s\times t}\in F^{s\times t}$，若其满足$m=s,n=t$，且$a_{ij}=b_{ij},i=1,2,\ldots,m(s);j=1,2,\ldots,n(t)$，

则称矩阵A,B相等，记作$A=B$

两个矩阵相等是一种“全等”.它们既要有相同的行数和相同的列数(也说它们“大小”相同)，同时对应位置的元素也要相等.

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的**和**，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$为矩阵$A$与$B$的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\left(\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\left(\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\left(\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ & \\ & \\ & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$为矩阵$A$与$B$的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{matrix}\right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.2 (矩阵的加法)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$是两个同阶数的矩阵，称以$(a_{ij}+b_{ij})$为元素的$m\times n$阶矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵A与B的和，记作$A+B$. 即，

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加.

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n}$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = B + A$;

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = B + A$;

(2)加法满足结合律

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = B + A$;

(2)加法满足结合律

即，任意的

$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, C = (c_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$(A + B) + C$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = B + A;$$

(2)加法满足结合律

即，任意的

$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, C = (c_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$$(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{m\times n}$$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m\times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m\times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=B+A$;

(2)加法满足结合律

即，任意的

$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n},C=(c_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{m\times n}$

$=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{m\times n}$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m \times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m \times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = (b_{ij} + a_{ij})_{m\times n} = B + A;$$

(2)加法满足结合律

即，任意的

$A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}, C = (c_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$，都有

$$(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{m\times n}$$

$$= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{m\times n} = A + (B + C);$$

1.2 矩阵的关系和运算

矩阵的加法只能是同阶(同大小)矩阵之间的运算。$m\times n$阶矩阵相加，和仍是一个$m\times n$阶矩阵，只要将它们对应位置的元素相加. 矩阵加法有如下性质

(1)加法满足交换律

即，任意的$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}=B+A$;

(2)加法满足结合律

即，任意的

$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}, C=(c_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$(A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{m\times n}$

$=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{m\times n}=A+(B+C)$;

元素全为0的矩阵称为0矩阵，即$0=(0)_{m\times n}$.

1.2 矩阵的关系和运算

(3)加法中有0矩阵存在

1.2 矩阵的关系和运算

(3)加法中有0矩阵存在

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，都有

$A+0=(a_{ij}+0)_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A$

(4)加法存在负矩阵

即，任意的$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，存在

$B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，使得$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=0$

1.2 矩阵的关系和运算

(3)加法中有0矩阵存在

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，都有

$A+0=(a_{ij}+0)_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A$

(4)加法存在负矩阵

即，任意的$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，存在

$B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，使得$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=0$

取$B=(-a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，则有

$A+B=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{m\times n}=0$

称满足$A+B=0$的矩阵B为A的负矩阵，记作$B=-A$.

1.2 矩阵的关系和运算

(3)加法中有0矩阵存在

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，都有

$A+0=(a_{ij}+0)_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A$

(4)加法存在负矩阵

即，任意的$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，存在

$B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，使得$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=0$

取$B=(-a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，则有

$A+B=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{m\times n}=0$

称满足$A+B=0$的矩阵B为A的负矩阵，记作$B=-A$.

利用“负矩阵”，可以定义矩阵的“减法”，即

$A-B=A+(-B)$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的**乘积**，也称数$k$与矩阵$A$的**数积**.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的乘积，也称数$k$与矩阵$A$的数积.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

数k与$m\times n$阶矩阵A相乘，乘积仍是一个$m\times n$阶矩阵，且把A的每一个元素都乘k.数与矩阵乘积有如下性质

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的乘积，也称数$k$与矩阵$A$的数积.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

数k与$m\times n$阶矩阵A相乘，乘积仍是一个$m\times n$阶矩阵，且把A的每一个元素都乘k.数与矩阵乘积有如下性质

(5)幺模性质

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的乘积，也称数$k$与矩阵$A$的数积.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

数k与$m\times n$阶矩阵A相乘，乘积仍是一个$m\times n$阶矩阵，且把A的每一个元素都乘k.数与矩阵乘积有如下性质

(5)幺模性质

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有$1\cdot A=A$;

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的乘积，也称数$k$与矩阵$A$的数积.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

数k与$m\times n$阶矩阵A相乘，乘积仍是一个$m\times n$阶矩阵，且把A的每一个元素都乘k.数与矩阵乘积有如下性质

(5)幺模性质

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有$1\cdot A=A$；

(6)数积结合律

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.3 (数与矩阵积)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k$是一个数，称以$ka_{ij}$为元素的$m\times n$矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$为数$k$与矩阵$A$的乘积，也称数$k$与矩阵$A$的数积.记作$kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

数k与$m\times n$阶矩阵A相乘，乘积仍是一个$m\times n$阶矩阵，且把A的每一个元素都乘k.数与矩阵乘积有如下性质

(5)幺模性质

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有$1\cdot A=A$;

(6)数积结合律

即，任意的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，$k,l$是两个数，都有

$(kl)A=((kl)a_{ij})_{m\times n}=(k(la_{ij}))_{m\times n}=k(lA)$;

1.2 矩阵的关系和运算

(7)数积对数的加法满足分配律

1.2 矩阵的关系和运算

(7)数积对数的加法满足分配律

即，任意的数k, l以及矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$$(k+l)A=kA+lA.$$

1.2 矩阵的关系和运算

(7)数积对数的加法满足分配律

即，任意的数k, l以及矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$$(k+l)A=kA+lA.$$

(8)数积对矩阵的加法满足分配律

1.2 矩阵的关系和运算

(7)数积对数的加法满足分配律

即，任意的数k,l以及矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$$(k+l)A=kA+lA.$$

(8)数积对矩阵的加法满足分配律

即，任意的数k，矩阵

$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$，都有

$$k(A+B)=kA+kB.$$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\ldots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\ldots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=a_{k1}b_{1l}$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\dots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=a_{k1}b_{1l}+a_{k2}b_{2l}$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\dots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=a_{k1}b_{1l}+a_{k2}b_{2l}+\cdots+a_{ks}b_{sl}$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\ldots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=a_{k1}b_{1l}+a_{k2}b_{2l}+\cdots+a_{ks}b_{sl}=\sum\limits_{i=1}^{s}a_{ki}b_{il}$，以$c_{kl}(k=1,2,\ldots,m;l=1,2,\ldots,n)$为元素定义$m\times n$阶矩阵$C=(c_{kl})_{m\times n}$

1.2 矩阵的关系和运算

定义1.4 (矩阵的乘法)

设$A=(a_{ij})_{m\times s}\in F^{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}\in F^{s\times n}$，记$c_{kl}$为矩阵$A$的第$k$行元素$(a_{k1}\ \ a_{k2}\dots a_{ks})$与矩阵$B$的第$l$列元素$\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{sl} \end{pmatrix}$对应乘积的和，即$c_{kl}=a_{k1}b_{1l}+a_{k2}b_{2l}+\cdots+a_{ks}b_{sl}=\sum\limits_{i=1}^{s}a_{ki}b_{il}$，以$c_{kl}(k=1,2,\dots,m;l=1,2,\dots,n)$为元素定义$m\times n$阶矩阵$C=(c_{kl})_{m\times n}=(\sum\limits_{i=1}^{s}a_{ki}b_{il})_{m\times n}$，称为矩阵$A$与$B$的乘积.

记作$C=AB$

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.4可以解释为:

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.4可以解释为：一个$m\times s$矩阵与一个$s\times n$阶矩阵的乘积是一个$m\times n$阶矩阵.

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.4可以解释为： 一个$m\times s$矩阵与一个$s\times n$阶矩阵的乘积是一个$m\times n$阶矩阵.积矩阵的行数与前一个矩阵的行数相同，积矩阵的列数与后一个矩阵的列数相同，且积矩阵的第i行j列位置的元素等于前一个矩阵中第i行元素与后一个矩阵第j列元素对应乘积的和.

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.4可以解释为：一个$m \times s$矩阵与一个$s \times n$阶矩阵的乘积是一个$m \times n$阶矩阵.积矩阵的行数与前一个矩阵的行数相同，积矩阵的列数与后一个矩阵的列数相同，且积矩阵的第i行j列位置的元素等于前一个矩阵中第i行元素与后一个矩阵第j列元素对应乘积的和.

矩阵的乘法定义比想象的要复杂，

1.2 矩阵的关系和运算

定义2.4可以解释为：一个$m \times s$矩阵与一个$s \times n$阶矩阵的乘积是一个$m \times n$阶矩阵.积矩阵的行数与前一个矩阵的行数相同，积矩阵的列数与后一个矩阵的列数相同，且积矩阵的第i行j列位置的元素等于前一个矩阵中第i行元素与后一个矩阵第j列元素对应乘积的和.

矩阵的乘法定义比想象的要复杂，不是任意给定的两个矩阵都可以进行“乘积”，可作积的两个矩阵必须是前一个矩阵列数等于后一个矩阵的行数，这也预示着矩阵的乘法会有一些意外的特殊性质.

1.2 矩阵的关系和运算

(9) 矩阵的乘法不满足交换律

1.2 矩阵的关系和运算

(9) 矩阵的乘法不满足交换律

这是因为：

①任意给定的两个矩阵A和B，A与B可求乘积时，B与A未必可以求积；

1.2 矩阵的关系和运算

(9) 矩阵的乘法不满足交换律

这是因为：

①任意给定的两个矩阵A和B，A与B可求乘积时，B与A未必可以求积；

②任意给定的两个矩阵A和B，即使A与B、B与A都可以求积，积矩阵的阶数也未必相等；

例如：$A_{2\times3}B_{3\times2}=(AB)_{2\times2}$，$B_{3\times2}A_{2\times3}=(BA)_{3\times3}$.

1.2 矩阵的关系和运算

(9) 矩阵的乘法不满足交换律

这是因为：

①任意给定的两个矩阵A和B，A与B可求乘积时，B与A未必可以求积；

②任意给定的两个矩阵A和B，即使A与B、B与A都可以求积，积矩阵的阶数也未必相等；

例如：$A_{2\times3}B_{3\times2}=(AB)_{2\times2}$，$B_{3\times2}A_{2\times3}=(BA)_{3\times3}$.

③任意给定的两个矩阵A和B，即使AB和BA都可以计算，并且结果是同阶矩阵，也未必相等.

1.2 矩阵的关系和运算

(9) 矩阵的乘法不满足交换律

这是因为：

①任意给定的两个矩阵A和B，A与B可求乘积时，B与A未必可以求积；

②任意给定的两个矩阵A和B，即使A与B、B与A都可以求积，积矩阵的阶数也未必相等；

例如：$A_{2\times3}B_{3\times2}=(AB)_{2\times2}$，$B_{3\times2}A_{2\times3}=(BA)_{3\times3}$.

③任意给定的两个矩阵A和B，即使AB和BA都可以计算，并且结果是同阶矩阵，也未必相等.

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$AB =$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times 2 & 1\times 1+(-1)\times 2 \\ (-1)\times 1+1\times 2 & (-1)\times 1+1\times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA =$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2&1\times1+(-1)\times2\\(-1)\times1+1\times2&(-1)\times1+1\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times(-1)\\ \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times 2 & 1\times 1+(-1)\times 2 \\ (-1)\times 1+1\times 2 & (-1)\times 1+1\times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+1\times(-1) & 1\times(-1)+1\times 1 \\ 2\times 1+2\times(-1) & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2&1\times1+(-1)\times2\\(-1)\times1+1\times2&(-1)\times1+1\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times(-1)&1\times(-1)+1\times1\\2\times1+2\times(-1)&2\times(-1)+2\times1\end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2&1\times1+(-1)\times2\\(-1)\times1+1\times2&(-1)\times1+1\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times(-1)&1\times(-1)+1\times1\\2\times1+2\times(-1)&2\times(-1)+2\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2&1\times1+(-1)\times2\\(-1)\times1+1\times2&(-1)\times1+1\times2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times(-1)&1\times(-1)+1\times1\\2\times1+2\times(-1)&2\times(-1)+2\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

特别，当矩阵A、B满足$AB=BA$时，称矩阵A与B可交换.

1.2 矩阵的关系和运算

(10) 矩阵的乘法不满足消去律

1.2 矩阵的关系和运算

(10) 矩阵的乘法不满足消去律

任意的矩阵$A \in F^{m\times s}$，$B, C \in F^{s\times n}$，由$AB = AC$且$A \neq 0$时，未必有$B = C$.

即，等式$AB = AC$的两边不能消去非0矩阵A.

1.2 矩阵的关系和运算

(10) 矩阵的乘法不满足消去律

任意的矩阵$A \in F^{m\times s}$，$B, C \in F^{s\times n}$，由$AB = AC$且$A \neq 0$时，未必有$B = C$.

即，等式$AB = AC$的两边不能消去非0矩阵A.

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

(10) 矩阵的乘法不满足消去律

任意的矩阵$A \in F^{m\times s}$，$B, C \in F^{s\times n}$，由$AB = AC$且$A \neq 0$时，未必有$B = C$.

即，等式$AB = AC$的两边不能消去非0矩阵A.

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = AC$$

1.2 矩阵的关系和运算

(10) 矩阵的乘法不满足消去律

任意的矩阵$A \in F^{m\times s}$，$B, C \in F^{s\times n}$，由$AB = AC$且$A \neq 0$时，未必有$B = C$.

即，等式$AB = AC$的两边不能消去非0矩阵A.

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = AC$$

即，$AB = AC$且$A \neq 0$，但$B \neq C$.

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times t}, C \in F^{t\times n}$，有$(AB)C = A(BC)$.

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times t}, C \in F^{t\times n}$，有$(AB)C = A(BC)$.

(12) 矩阵的乘法对矩阵的加法有左、右分配律

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times t}, C \in F^{t\times n}$，有$(AB)C = A(BC)$.

(12) 矩阵的乘法对矩阵的加法有左、右分配律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B, C \in F^{s\times n}$，则$A(B+C) = AB + AC$(左分配律)；

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A\in F^{m\times s}, B\in F^{s\times t}, C\in F^{t\times n}$，有$(AB)C=A(BC)$.

(12) 矩阵的乘法对矩阵的加法有左、右分配律

即，任意的矩阵$A\in F^{m\times s}, B, C\in F^{s\times n}$，则$A(B+C)=AB+AC$(左分配律)；

即，任意的矩阵$A, B\in F^{m\times s}, C\in F^{s\times n}$，则$(A+B)C=AC+BC$(右分配律)

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times t}, C \in F^{t\times n}$，有$(AB)C = A(BC)$.

(12) 矩阵的乘法对矩阵的加法有左、右分配律

即，任意的矩阵$A \in F^{m\times s}, B, C \in F^{s\times n}$，则$A(B + C) = AB + AC$(左分配律)；

即，任意的矩阵$A, B \in F^{m\times s}, C \in F^{s\times n}$，则$(A + B)C = AC + BC$(右分配律)

(13) 在矩阵乘法中，单位矩阵与任何矩阵的积(在可求积的时候)都是任何矩阵自身

1.2 矩阵的关系和运算

(11) 矩阵的乘法满足结合律

即，任意的矩阵$A\in F^{m\times s}, B\in F^{s\times t}, C\in F^{t\times n}$，有$(AB)C=A(BC)$.

(12) 矩阵的乘法对矩阵的加法有左、右分配律

即，任意的矩阵$A\in F^{m\times s}, B, C\in F^{s\times n}$，则$A(B+C)=AB+AC$(左分配律)；

即，任意的矩阵$A, B\in F^{m\times s}, C\in F^{s\times n}$，则$(A+B)C=AC+BC$(右分配律)

(13) 在矩阵乘法中，单位矩阵与任何矩阵的积(在可求积的时候)都是任何矩阵自身

即，任意的矩阵$A\in F^{m\times n}$，都有$I_mA=A=AI_n$，其中I_m, I_n分别是m, n阶单位矩阵.

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

设K_m是由数k所决定的$m \times m$阶数量矩阵，即

$$K_m = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kI_m,$$

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有

$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

设K_m是由数k所决定的$m \times m$阶数量矩阵，即

$$K_m = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kI_m,$$

任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$K_mA = kA = AK_n$；

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有

$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

设K_m是由数k所决定的$m \times m$阶数量矩阵，即

$$K_m = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kI_m,$$

任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$K_mA = kA = AK_n$；

(16)矩阵的幂

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

设K_m是由数k所决定的$m \times m$阶数量矩阵，即

$$K_m = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kI_m,$$

任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$K_m A = kA = AK_n$；

(16)矩阵的幂

A是$n \times n$阶矩阵，m个矩阵A相乘，称为A的m次幂，记作A^m.

1.2 矩阵的关系和运算

(14) 数积与矩阵积具有结合律

即，任意数k和矩阵$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有
$k(AB) = (kA)B = A(kB)$；

(15) 数与矩阵的乘积可以看作数量阵与矩阵的乘积

设K_m是由数k所决定的$m \times m$阶数量矩阵，即

$$K_m = \begin{pmatrix} k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kI_m,$$

任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$K_m A = kA = AK_n$；

(16)矩阵的幂

A是$n \times n$阶矩阵，m个矩阵A相乘，称为A的m次幂，记作A^m. 任意的正整数k, l，矩阵的幂运算满足：
$A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}$.

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n \times n$矩阵A, B，$(AB)^k = A^k B^k$一般不成立.

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立.
当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立. 当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$.

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n \times n$矩阵A, B，$(AB)^k = A^k B^k$一般不成立. 当A, B可交换时，$(AB)^k = A^k B^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A = (a_{ij})_{m\times n}$是$m \times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，. . .，第m行写为第m列，得到$n \times m$阶矩阵$B = (a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的**转置矩阵**.记作$B = A'$或$B = A^t$. 即，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n \times n$矩阵A, B，$(AB)^k = A^k B^k$一般不成立. 当A, B可交换时，$(AB)^k = A^k B^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A = (a_{ij})_{m\times n}$是$m \times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n \times m$阶矩阵$B = (a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B = A'$或$B = A^t$. 即，

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \end{array} \right.$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立.

当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n \times n$矩阵A, B，$(AB)^k = A^k B^k$一般不成立. 当A, B可交换时，$(AB)^k = A^k B^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A = (a_{ij})_{m \times n}$是$m \times n$阶矩阵，将$A$的行列互换，即把$A$的第1行写为第1列，第2行写为第2列，...，第$m$行写为第$m$列，得到$n \times m$阶矩阵$B = (a_{ji})_{n \times m}$，则称矩阵$B$是矩阵$A$的转置矩阵.记作$B = A'$或$B = A^t$. 即，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立.
当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立. 当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot \\ a_{12} & a_{22} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立.
当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，…，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立. 当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，…，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置实际上是对矩阵的一个变形.

1.2 矩阵的关系和运算

注意：两个$n\times n$矩阵A,B，$(AB)^k=A^kB^k$一般不成立.
当A,B可交换时，$(AB)^k=A^kB^k$成立.

定义1.5 (矩阵的转置)

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$m\times n$阶矩阵，将A的行列互换，即把A的第1行写为第1列，第2行写为第2列，$\ldots$，第m行写为第m列，得到$n\times m$阶矩阵$B=(a_{ji})_{n\times m}$，则称矩阵B是矩阵A的转置矩阵.记作$B=A'$或$B=A^t$. 即，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置实际上是对矩阵的一个变形.

若$A^t=A$，则称A是对称矩阵.

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

即，任意的$A, B \in F^{m\times n}$，都有$(A+B)^t = A^t + B^t$；

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

即，任意的$A, B \in F^{m\times n}$，都有$(A+B)^t = A^t + B^t$；

(18)数与矩阵积的转置等于转置矩阵的数积

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

即，任意的$A, B \in F^{m\times n}$，都有$(A+B)^t = A^t + B^t$；

(18)数与矩阵积的转置等于转置矩阵的数积

即，任意的数k和矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$(kA)^t = kA^t$；

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

即，任意的$A, B \in F^{m\times n}$，都有$(A+B)^t = A^t + B^t$；

(18)数与矩阵积的转置等于转置矩阵的数积

即，任意的数k和矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$(kA)^t = kA^t$；

(19)两个矩阵乘积的转置等于颠倒顺序的转置的积

1.2 矩阵的关系和运算

(17)两个矩阵和的转置等于转置的和

即，任意的$A, B \in F^{m\times n}$，都有$(A+B)^t = A^t + B^t$；

(18)数与矩阵积的转置等于转置矩阵的数积

即，任意的数k和矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$(kA)^t = kA^t$；

(19)两个矩阵乘积的转置等于颠倒顺序的转置的积

即，任意的$A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$，都有$(AB)^t = B^tA^t$.

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

设人口总数为m，调查初始城镇人口为x_0，农村人口为y_0，一年后，则$x_0 + y_0 = m$，且

城镇人口 $x_1 = 0.9x_0 + 0.2y_0;$

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

设人口总数为m，调查初始城镇人口为x_0，农村人口为y_0，一年后，则$x_0+y_0=m$，且

城镇人口 $x_1=0.9x_0+0.2y_0$;　　农村人口 $y_1=0.1x_0+0.8y_0$.

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

设人口总数为m，调查初始城镇人口为x_0，农村人口为y_0，一年后，则$x_0 + y_0 = m$，且

城镇人口 $x_1 = 0.9x_0 + 0.2y_0$;　　农村人口 $y_1 = 0.1x_0 + 0.8y_0$.

用矩阵表示就是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ & \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

设人口总数为m，调查初始城镇人口为x_0，农村人口为y_0，一年后，则$x_0+y_0=m$，且

$$\text{城镇人口 } x_1=0.9x_0+0.2y_0; \qquad \text{农村人口 } y_1=0.1x_0+0.8y_0.$$

用矩阵表示就是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

例2.1 (城乡人口流动模型)

通过对城乡人口流动做年度调查，发现每年农村居民的20%移居城镇，而城镇居民的10%流入农村.假如城乡总人口保持不变，并且人口流动的这种趋势继续下去，那么最终城镇人口与农村人口的分布是否会趋于一个“稳定状态”？

设人口总数为m，调查初始城镇人口为x_0，农村人口为y_0，一年后，则$x_0+y_0=m$，且

城镇人口 $x_1 = 0.9x_0 + 0.2y_0$; 农村人口 $y_1 = 0.1x_0 + 0.8y_0$.

用矩阵表示就是:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

n年之后，则有 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

1.2 矩阵的关系和运算

两年之后，则

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

n年之后，则有$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

可以利用下面的矩阵运算关系计算矩阵的n次方幂.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)^n$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)^n$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)^n$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right)^n$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}(x_0 - 2y_0)(0.7)^n \\ \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}(x_0 - 2y_0)(0.7)^n \end{pmatrix}$$

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{pmatrix}$$

即，$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ y_n = \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{cases}$，

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{pmatrix}$$

即，$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ y_n = \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{cases}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(0.7)^n = 0$，

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{pmatrix}$$

即，$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ y_n = \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{cases}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(0.7)^n = 0$，

所以，若干年后，城镇人口稳定在总人口的$\frac{2}{3}$，农村人口稳定在总人口的$\frac{1}{3}$.

1.2 矩阵的关系和运算

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}(0.7)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.7)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(0.7)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{pmatrix}$$

即，$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3}m+\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \\ y_n = \frac{1}{3}m-\frac{1}{3}(x_0-2y_0)(0.7)^n \end{cases}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(0.7)^n = 0$，

所以，若干年后，城镇人口稳定在总人口的$\frac{2}{3}$，农村人口稳定在总人口的$\frac{1}{3}$.

即，在人口流动状态不变的情况下，随着时间的推移，农村人口和城镇人口，将趋于一个稳定的状态.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun

ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China

EMAIL: Ning.qun@163.com