线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.2 n维数组向量空间

设F是复数集或实数集，记F^n为F 上所有的“n维数组向量”组成的集合，即

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_k \in F, k = 1, 2, ..., n \right\},$$

3.2 n维数组向量空间

设F是复数集或实数集，记F^n为F 上所有的“n维数组向量”组成的集合，即

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_k \in F, k = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

F^n中的元素$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，

3.2 n维数组向量空间

设F是复数集或实数集，记F^n为F 上所有的“n维数组向量”组成的集合，即

$$F^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle|\, a_k\in F, k=1,2,...,n\right\},$$

F^n中的元素$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，$a_k$称为$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$的第$k$个分量，$k=1,2,...,n$.

3.2 n维数组向量空间

设F是复数集或实数集，记F^n为F 上所有的“n维数组向量”组成的集合，即

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_k \in F, k = 1, 2, ..., n \right\},$$

F^n中的元素$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$F$上的$n$维向量，$a_k$称为$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$的第$k$个分量，$k = 1, 2, ..., n$.

通常用α, β, γ等小写的希腊字母来表示F^n中的向量.

3.2 n维数组向量空间

F^n也是F上的$n \times 1$阶矩阵的全体，对照矩阵运算，F^n中有定义：

3.2 n维数组向量空间

F^n也是F上的$n\times 1$阶矩阵的全体，对照矩阵运算，F^n中有定义：

1.F^n中两个向量的相等

3.2 n维数组向量空间

F^n也是F上的$n\times 1$阶矩阵的全体，对照矩阵运算，F^n中有定义：

1.F^n中两个向量的相等

F^n中两个向量$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，若满足$\begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ \vdots \\ a_n=b_n \end{cases}$

即它们对应的分量相等，则称n维向量α 与β 是相等的，

3.2 n维数组向量空间

F^n也是F上的$n\times 1$阶矩阵的全体，对照矩阵运算，F^n中有定义：

1.F^n中两个向量的相等

F^n中两个向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，若满足$\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\\vdots\\a_n=b_n\end{cases}$

即它们对应的分量相等，则称n维向量α 与β 是相等的，记作：

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\text{或}\quad \alpha=\beta.$$

3.2 n维数组向量空间

2.F^n 中的加法运算.

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意两个元素($n$ 维向量),

称向量$\gamma = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$ 为$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 与$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的和.

3.2 n维数组向量空间

2.F^n 中的加法运算.

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意两个元素($n$ 维向量),

称向量$\gamma = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$ 为$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 与$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 的和.

记作: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$, 或$\alpha + \beta = \gamma$.

3.2 n维数组向量空间

F^n中的加法运算满足以下性质

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

3.2 n维数组向量空间

F^n中的加法运算满足以下性质

设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

(1°)加法具有交换律.

3.2 n维数组向量空间

F^n中的加法运算满足以下性质

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

(1°)加法具有交换律.即

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} =$$

3.2 n维数组向量空间

F^n中的加法运算满足以下性质

设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$是$F^n$中任意的$n$维数组向量，则

(1°)加法具有交换律.即

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \beta + \alpha$$

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.即

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.即

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.即

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.即

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ (a_2+b_2)+c_2 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ a_2+(b_2+c_2) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (b_1+c_1) \\ (b_2+c_2) \\ \vdots \\ (b_n+c_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(2°)加法满足结合律.即

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\\vdots\\(a_n+b_n)+c_n\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\\vdots\\a_n+(b_n+c_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(b_1+c_1)\\(b_2+c_2)\\\vdots\\(b_n+c_n)\end{pmatrix}=\alpha+(\beta+\gamma).$$

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量，记作0.

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量，记作0.

任意的$\alpha \in F^n$，都有$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量，记作0.

任意的$\alpha \in F^n$，都有$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量，记作0.

任意的$\alpha \in F^n$，都有$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

即，任意$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$，存在$\beta = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \in F^n$，使

得$\alpha + \beta = 0$.

3.2 n维数组向量空间

(3°)加法运算存在0向量.

F^n中分量全为0的n维数组向量，称为n维0向量，记作0.

任意的$\alpha \in F^n$，都有$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

(4°) F^n中每一个向量都存在负向量.

即，任意$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n$，存在$\beta = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \in F^n$，使

得$\alpha + \beta = 0$.

称满足$\alpha + \beta = 0$ 的向量β 为向量α的负向量.

记作$\beta = -\alpha$.

3.2 n维数组向量空间

3.F中的数与F^n的数乘运算.

3.2 n维数组向量空间

3.F中的数与F^n的数乘运算.

设k为F 中的数，$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$为$F^n$中的向量，称$F^n$中的向量$\beta = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 为k与α 的积.

3.2 n维数组向量空间

3.F中的数与F^n的数乘运算.

设k为F 中的数，$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$为$F^n$中的向量，称$F^n$中的向量$\beta = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 为k与α 的积.

记作：$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ 或者$k\alpha = \beta$.

3.2 n维数组向量空间

F中的数k与F^n中的n维数组向量α的数积，就是用k乘n维数组向量α的每一个分量.

3.2 n维数组向量空间

F中的数k与F^n中的n维数组向量α的数积，就是用k乘n维数组向量α的每一个分量.

设k,l是F中的任意数，$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运算满足以下性质

3.2 n维数组向量空间

F中的数k与F^n中的n维数组向量α的数积，就是用k乘n维数组向量α的每一个分量.

设k,l是F中的任意数，$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运算满足以下性质

(5°)幺模性质.

3.2 n维数组向量空间

F中的数k与F^n中的n维数组向量α的数积，就是用k乘n维数组向量α的每一个分量.

设k,l是F中的任意数，$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是F^n中任意向量.

数积运算满足以下性质

(5°)幺模性质.即$1\alpha=\alpha$.

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.即

$$(kl)\alpha = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.即

$$(kl)\alpha = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.即

$$(kl)\alpha=\begin{pmatrix}(kl)a_1\\(kl)a_2\\\vdots\\(kl)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(la_1)\\k(la_2)\\\vdots\\k(la_n)\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}la_1\\la_2\\\vdots\\la_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.即

$$(kl)\alpha = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix} =$$

$$k(l\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix})$$

3.2 n维数组向量空间

(6°)结合律.即

$$(kl)\alpha = \begin{pmatrix} (kl)a_1 \\ (kl)a_2 \\ \vdots \\ (kl)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(la_1) \\ k(la_2) \\ \vdots \\ k(la_n) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix} =$$

$$k(l \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}) = k(l\alpha).$$

3.2 n维数组向量空间

(7°)对数的加法具有分配律.

3.2 n维数组向量空间

(7°)对数的加法具有分配律.即

$$(k+l)\alpha=\begin{pmatrix}(k+l)a_1\\(k+l)a_2\\\vdots\\(k+l)a_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(7°)对数的加法具有分配律.即

$$(k+l)\alpha=\begin{pmatrix}(k+l)a_1\\(k+l)a_2\\\vdots\\(k+l)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1+la_1\\ka_2+la_2\\\vdots\\ka_n+la_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(7°)对数的加法具有分配律.即

$$(k+l)\alpha=\begin{pmatrix}(k+l)a_1\\(k+l)a_2\\\vdots\\(k+l)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1+la_1\\ka_2+la_2\\\vdots\\ka_n+la_n\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}la_1\\la_2\\\vdots\\la_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(7°)对数的加法具有分配律.即

$$(k+l)\alpha=\begin{pmatrix}(k+l)a_1\\(k+l)a_2\\\vdots\\(k+l)a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1+la_1\\ka_2+la_2\\\vdots\\ka_n+la_n\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}la_1\\la_2\\\vdots\\la_n\end{pmatrix}=k\alpha+l\alpha.$$

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.即

$$k(\alpha+\beta)=k\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.即

$$k(\alpha+\beta)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.即

$$k(\alpha+\beta)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.即

$$k(\alpha+\beta)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kb_1\\kb_2\\\vdots\\kb_n\end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

(8°)对F^n中向量的加法具有分配律.即

$$k(\alpha+\beta)=k\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_1+b_1)\\k(a_2+b_2)\\\vdots\\k(a_n+b_n)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}ka_1+kb_1\\ka_2+kb_2\\\vdots\\ka_n+kb_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kb_1\\kb_2\\\vdots\\kb_n\end{pmatrix}=k\alpha+k\beta.$$

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

定义3.1 数集F(实数集或复数集)上所有n元有序数组组成的集合F^n定义了相等关系，以及“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质$(1°)$ ~性质$(8°)$，则称F^n按所定义的运算构成了一个n维向量空间.F^n中的元素称为n维向量.

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

定义3.1 数集F(实数集或复数集)上所有n元有序数组组成的集合F^n定义了相等关系，以及“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°) $\sim$性质(8°)，则称F^n按所定义的运算构成了一个n维向量空间.F^n中的元素称为n维向量.

在n维向量空间F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

定义3.1 数集F(实数集或复数集)上所有n元有序数组组成的集合F^n定义了相等关系，以及“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质$(1°)$ ~性质$(8°)$，则称F^n按所定义的运算构成了一个n维向量空间.F^n中的元素称为n维向量.

在n维向量空间F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

在n维向量空间F^n中，还有以下运算性质

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

定义3.1 数集F(实数集或复数集)上所有n元有序数组组成的集合F^n定义了相等关系，以及“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°) ~性质(8°)，则称F^n按所定义的运算构成了一个n维向量空间.F^n中的元素称为n维向量.

在n维向量空间F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

在n维向量空间F^n中，还有以下运算性质

(9°)任意的$\alpha\in F^n$, $k\in F$，则$k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=0$.

3.2 n维数组向量空间

F^n中定义了相等关系、加法、数积运算，这样也给出了F^n的一种结构，称这种结构为向量空间.

定义3.1 数集F(实数集或复数集)上所有n元有序数组组成的集合F^n定义了相等关系，以及“加法”和“数积”运算，且“加法”与“数积”满足运算性质(1°) ~性质(8°)，则称F^n按所定义的运算构成了一个n维向量空间.F^n中的元素称为n维向量.

在n维向量空间F^n中，利用“负向量”，可以定义向量的“减法”运算：$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

在n维向量空间F^n中，还有以下运算性质

(9°)任意的$\alpha\in F^n$, $k\in F$，则$k\alpha=0\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=0$.

(10°)任意的$\alpha\in F^n$，则$-\alpha=(-1)\alpha$.

3.2 n维数组向量空间

F^n中，由若干个向量构成的整体称为**向量组**.

3.2 n维数组向量空间

F^n中，由若干个向量构成的整体称为向量组.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$m$个$n$ 维向量构成的向量组，$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 是F中m 个数，则$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个线性组合. 数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个组合的系数.

3.2 n维数组向量空间

F^n中，由若干个向量构成的整体称为向量组.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$m$个$n$ 维向量构成的向量组，$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 是F中m 个数，则$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个线性组合. 数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个组合的系数.

对F^n中给定的$m+1$个n 维向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ ，若存在F中的一组数$c_1, c_2, \ldots, c_m$ ，使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = \beta,$$

则称 β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出.

3.2 n维数组向量空间

F^n中，由若干个向量构成的整体称为向量组.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是$m$个$n$ 维向量构成的向量组，$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 是F中m 个数，则$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$ 仍是F^n中的一个n维向量，称为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个线性组合. 数$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个组合的系数.

对F^n中给定的$m+1$个n 维向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ ，若存在F中的一组数$c_1, c_2, \ldots, c_m$ ，使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m = \beta,$$

则称 β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出.

也说 β 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个线性组合.

3.2 n维数组向量空间

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

3.2 n维数组向量空间

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},$$

3.2 n维数组向量空间

设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ldots,\alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

3.2 n维数组向量空间

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

3.2 n维数组向量空间

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

由数组向量空间中向量的运算以及相等关系，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

可以表述成$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$

3.2 n维数组向量空间

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

3.2 n维数组向量空间

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

即，求线性方程组的解，就是求系数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立.

3.2 n维数组向量空间

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

即，求线性方程组的解，就是求系数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立.

判定线性方程组是否有解，就是判断m维向量β 能否由m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出，

3.2 n维数组向量空间

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

即，求线性方程组的解，就是求系数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立.

判定线性方程组是否有解，就是判断m维向量β 能否由m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出，

或者说是判断向量β 是否是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的一个线性组合.

3.2 n维数组向量空间

即

$$\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}\text{有解}$$

3.2 n维数组向量空间

即

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1, x_2, \ldots, x_n$使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立

3.2 n维数组向量空间

即

$$\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}\text{有解}$$

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1,x_2,\ldots,x_n$使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$成立

$\Leftrightarrow$ β可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性表出.

3.2 n维数组向量空间

即

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1, x_2, \ldots, x_n$使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立

$\Leftrightarrow$ β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出.

线性方程组解的判定问题归结为：方程组的常数列向量能不能由未知量的系数列向量组线性表出.

3.2 n维数组向量空间

即

$$\text{线性方程组}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \text{有解}$$

$\Leftrightarrow$ 存在$x_1, x_2, \ldots, x_n$使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$成立

$\Leftrightarrow$ β可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出.

线性方程组解的判定问题归结为：方程组的常数列向量能不能由未知量的系数列向量组线性表出.

研究线性方程组有没有解，就要去研究向量β能否由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出；

3.2 n维数组向量空间

F^n中的任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 以及向量β ，判断β 是否可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出，就是判断线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 是否有解.

3.2 n维数组向量空间

F^n中的任意向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 以及向量β ，判断β 是否可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出，就是判断线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 是否有解.

例3.1 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

判断β是否可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.若能表出，写出它的一种表示方法.

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立.

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立.也就是判断线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解.

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立.也就是判断线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解.

构作以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为列的矩阵，即，方程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1,x_2,x_3 ，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 成立.也就是判断线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 是否有解.

构作以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 为列的矩阵，即，方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化其成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{matrix}\right.$$

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立.也就是判断线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解.

构作以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为列的矩阵，即，方程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化其成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

解 判断β是否能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出，就是判定是否存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立.也就是判断线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解.

构作以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为列的矩阵，即，方程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

对矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化其成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -15 & -5 & -5 \\ 0 & 27 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中的最后一列没有主元，所以以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组一定有解.

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中的最后一列没有主元，所以以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组一定有解.

即存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立，β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中的最后一列没有主元，所以以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组一定有解.

即存在系数x_1, x_2, x_3 ，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立，β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

对阶梯形矩阵进一步进行初等行变换，化为规范阶梯形

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中的最后一列没有主元，所以以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组一定有解.

即存在系数x_1, x_2, x_3，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立，β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

对阶梯形矩阵进一步进行初等行变换，化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

3.2 n维数组向量空间

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中的最后一列没有主元，所以以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组一定有解.

即存在系数x_1, x_2, x_3，使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 成立，β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

对阶梯形矩阵进一步进行初等行变换，化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 n维数组向量空间

对应的方程组有通解：$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$，其中$x_3$是自由未知量.

取$x_3 = 1$，则$x_1 = 1, x_2 = 0$，于是$\beta = \alpha_1 + \alpha_3$.

3.2 n维数组向量空间

对应的方程组有通解：$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$，其中$x_3$是自由未知量.

取$x_3 = 1$，则$x_1 = 1, x_2 = 0$，于是$\beta = \alpha_1 + \alpha_3$.

注：在有解的情形下，阶梯形矩阵的主元个数为2，小于未知量个数3，从而方程组有无穷多个解，因此β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的方式有无穷多种.

3.2 n维数组向量空间

对应的方程组有通解：$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$ ，其中x_3是自由未知量.

取$x_3 = 1$，则$x_1 = 1, x_2 = 0$，于是$\beta = \alpha_1 + \alpha_3$.

注：在有解的情形下，阶梯形矩阵的主元个数为2 ，小于未知量个数3 ，从而方程组有无穷多个解，因此β 可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出的方式有无穷多种.

由于线性方程组未必都有解，所以在n 维向量空间F^n中，β未必可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出.

3.2 n维数组向量空间

问题是：给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 满足什么特征，任意的向量β 都可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出？

3.2 n维数组向量空间

问题是：给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 满足什么特征，任意的向量β 都可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出？而在可以表出时，需要满足什么条件，才可以使表示的方式唯一或者不唯一？

3.2 n维数组向量空间

问题是：给定的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 满足什么特征，任意的向量β 都可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出？而在可以表出时，需要满足什么条件，才可以使表示的方式唯一或者不唯一？

F^n中任意的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m = 0,$$

即，0向量可以由任意向量组线性表出.

3.2 n维数组向量空间

问题是：给定的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 满足什么特征，任意的向量β 都可以由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性表出？而在可以表出时，需要满足什么条件，才可以使表示的方式唯一或者不唯一？

F^n中任意的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ ，当组合系数全取0 时，有

$$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0,$$

即，0向量可以由任意向量组线性表出.自然的想法是：0向量被给定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性表出时，系数是否一定要都取0？

这个问题是讨论向量组属性的“分水岭”，是下一节的主要内容.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com