线性代数
第三章：向量空间
习 题 解 答

宿州学院　数学与统计学院

目录

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(2)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(2)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

存在不全为0的数$1,1,0$，使得

$$1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\neq 0,$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(2)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

存在不全为0的数$1,1,0$，使得

$$1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\neq 0,$$

而$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

1.解 (1)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

有$0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0$，但也有$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(2)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

存在不全为0的数$1,1,0$，使得

$$1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\neq 0,$$

而$(-1)\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3=0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

存在$k_1=1,k_2=-1$，使得

$$1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0,$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

存在$k_1=1,k_2=-1$，使得

$$1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0,$$

但α_1,α_2线性无关，β_1,β_2也线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(4)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(4)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},$$

满足只有$k_1=k_2=0$时，等式

$$k_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=0,$$

成立.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(4)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},$$

满足只有$k_1=k_2=0$时，等式

$$k_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=0,$$

成立.

但α_1,α_2线性相关，β_1,β_2也线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(5)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(5)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(5)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性相关.

但使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$同时成立，必须$k_1=k_2=k_3=0$.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(5)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性相关.

但使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$同时成立，必须$k_1=k_2=k_3=0$.

(6)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(5)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性相关.

但使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$同时成立，必须$k_1=k_2=k_3=0$.

(6)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，但$\alpha_1$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组，

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组，

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

2.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组，

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

2.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组，

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

2.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(7)如

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\widetilde{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\widetilde{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的延伸组，

$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

2.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&3&0\\2&1&7\\4&2&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)另解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)另解 记

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性无关且是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$缩短组，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3)另解 记

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性无关且是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$缩短组，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(4) 因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个3维向量，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

3.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

3.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 0\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

3.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

3.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&0&2\\2&5&0\\-4&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

3.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&0&2\\2&5&0\\-4&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

3.解 (1)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&0&2\\2&5&0\\-4&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & -13 & 6 \\ 2 & -7 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&1&7&-2\\-1&5&-13&6\\2&-7&20&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & -13 & 6 \\ 2 & -7 & 20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.且$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(3)以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & 5 & -13 & 6 \\ 2 & -7 & 20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A的阶梯形中有3个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关. 且$\alpha_3=3\alpha_1+(-2)\alpha_2+0\alpha_4$.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

4.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & t & 2\\ 2 & 1 & -t\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&\frac{t}{5}\\0&0&\frac{t(3-t)}{5}+2\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&\frac{t}{5}\\0&0&\frac{t(3-t)}{5}+2\end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$A$的阶梯形中的主元个数小于3，从而$\frac{t(3-t)}{5}+2=0$，$t=5$或者$t=-2$.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&\frac{t}{5}\\0&0&\frac{t(3-t)}{5}+2\end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$A$的阶梯形中的主元个数小于3，从而$\frac{t(3-t)}{5}+2=0$，$t=5$或者$t=-2$.

5.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&\frac{t}{5}\\0&0&\frac{t(3-t)}{5}+2\end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$A$的阶梯形中的主元个数小于3，从而$\frac{t(3-t)}{5}+2=0$，$t=5$或者$t=-2.$

5.解 (1)以α_1,α_2为列构作矩阵A，并对A实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}6&a\\a+1&2\\3&-2\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

4.解 以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&t&2\\2&1&-t\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&\frac{t}{5}\\0&0&\frac{t(3-t)}{5}+2\end{pmatrix},$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以$A$的阶梯形中的主元个数小于3，从而$\frac{t(3-t)}{5}+2=0$，$t=5$或者$t=-2$.

5.解 (1)以α_1,α_2为列构作矩阵A，并对A实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}6&a\\a+1&2\\3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}3&-2\\0&a+4\\0&0\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

当$a = -4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1, α_2线性相关；

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

当$a=-4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1,α_2线性相关；

当$a\neq-4$时，A的阶梯形矩阵中只有2个主元，α_1,α_2线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

当$a=-4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1,α_2线性相关；

当$a\neq -4$时，A的阶梯形矩阵中只有2个主元，α_1,α_2线性无关.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 6 & a & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

当$a=-4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1,α_2线性相关；

当$a\neq-4$时，A的阶梯形矩阵中只有2个主元，α_1,α_2线性无关.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 6 & a & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a+4 & a \\ 0 & 0 & 3-2a \end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

当$a=-4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1,α_2线性相关；

当$a\neq-4$时，A的阶梯形矩阵中只有2个主元，α_1,α_2线性无关.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}6 & a & a\\ a+1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & a+4 & a\\ 0 & 0 & 3-2a\end{pmatrix},$$

若$a=-4$或$a=\frac{2}{3}$时，A的阶梯形矩阵中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

当$a=-4$时，A的阶梯形矩阵中只有1个主元，α_1,α_2线性相关；

当$a\neq -4$时，A的阶梯形矩阵中只有2个主元，α_1,α_2线性无关.

(2)以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵$A$，并对$A$实施初等行变换

$$A=\begin{pmatrix} 6 & a & a \\ a+1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a+4 & a \\ 0 & 0 & 3-2a \end{pmatrix},$$

若$a=-4$或$a=\frac{2}{3}$时，A的阶梯形矩阵中有2个主元，小于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

若$a\neq -4$且$a\neq \frac{2}{3}$时，A的阶梯形矩阵中有3个主元，等于向量个数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$4$个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$,

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，

所以

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 \quad = x_1(2\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(-\alpha_1+\alpha_2)$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，

所以

$$\begin{aligned} x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 &= x_1(2\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(-\alpha_1+\alpha_2) \\ &= (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2 \end{aligned}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，

所以

$$\begin{aligned}x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 &= x_1(2\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(-\alpha_1+\alpha_2)\\ &= (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2\end{aligned}$$

所以

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0\Leftrightarrow(2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2=0$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，

由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，

所以

$$\begin{aligned} x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 &= x_1(2\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(-\alpha_1+\alpha_2) \\ &= (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2 \end{aligned}$$

所以

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2=0$$

令$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \end{cases} \quad (*)$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

(3) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是4个三维向量，所以无论$a$取什么值，它们都是线性相关的.

6.解 考虑β_1,β_2,β_3的线性组合$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$，由于$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+\alpha_2$，所以

$$\begin{aligned} x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 &= x_1(2\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+x_3(-\alpha_1+\alpha_2) \\ &= (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2 \end{aligned}$$

所以

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (2x_1+x_2-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2+x_3)\alpha_2=0$$

令$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ $(*)$，则使得$(*)$成立的x_1,x_2,x_3，必有$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$(*)$成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$(*)$成立，所以存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$(*)$成立，所以存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立，

所以β_1,β_2,β_3线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$(*)$成立，所以存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立，

所以β_1,β_2,β_3线性相关.

7.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而(∗)是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得(∗)成立，所以存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立，

所以β_1,β_2,β_3线性相关.

7.证明 考虑向量组$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$的线性组合

$$x_1(\alpha_1+2\alpha_2)+x_2(\alpha_2+2\alpha_3)+x_3(\alpha_3+2\alpha_1)=0,$$

即$(x_1+2x_3)\alpha_1+(2x_1+x_2)\alpha_2+(2x_2+x_3)\alpha_3=0$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而$(*)$是未知量个数大于方程个数的齐次线性方程组，有非零解，即存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$(*)$成立，所以存在不全为0的x_1,x_2,x_3，使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$成立，

所以β_1,β_2,β_3线性相关.

7.证明 考虑向量组$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$的线性组合

$$x_1(\alpha_1+2\alpha_2)+x_2(\alpha_2+2\alpha_3)+x_3(\alpha_3+2\alpha_1)=0,$$

即$(x_1+2x_3)\alpha_1+(2x_1+x_2)\alpha_2+(2x_2+x_3)\alpha_3=0$，

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$(x_1+2x_3)\alpha_1+(2x_1+x_2)\alpha_2+(2x_2+x_3)\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=0\\2x_1+x_2=0\\2x_2+x_3=0\end{cases}\quad(*)$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix},$$

A的阶梯形矩阵中有3个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix},$$

A的阶梯形矩阵中有3个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解，即只有当$x_1=x_2=x_3=0$时，$(*)$才成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix},$$

A的阶梯形矩阵中有3个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解，即只有当$x_1=x_2=x_3=0$时，$(*)$才成立，

即，只有当$x_1=x_2=x_3=0$时，才有

$$x_1(\alpha_1+2\alpha_2)+x_2(\alpha_2+2\alpha_3)+x_3(\alpha_3+2\alpha_1)=0$$

成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$是关于x_1,x_2,x_3的齐次线性方程组，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&9\end{pmatrix},$$

A的阶梯形矩阵中有3个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解，即只有当$x_1=x_2=x_3=0$时，$(*)$才成立，

即，只有当$x_1=x_2=x_3=0$时，才有

$$x_1(\alpha_1+2\alpha_2)+x_2(\alpha_2+2\alpha_3)+x_3(\alpha_3+2\alpha_1)=0$$

成立，所以$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$线性无关.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

8.解

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

8.解 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

8.解 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

8.解 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

9.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

8.解 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

9.证明 考虑向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$的线性组合$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0$,
即$(x_1+x_2+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_2+\cdots+x_s)\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

8.解 因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)+(-1)(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性相关.

9.证明 考虑向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$的线性组合$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0$,
即$(x_1+x_2+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_2+\cdots+x_s)\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，所以

$$x_1+x_2+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_2+\cdots+x_s)\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_s=0\\x_2+\cdots+x_s=0\\\vdots\\x_s=0\end{cases}\qquad(*)$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而齐次线性方程组$(*)$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

而齐次线性方程组$(*)$的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

有s个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而齐次线性方程组$(*)$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

有s个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解.

即只有当$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$时，才可以使得$(*)$成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而齐次线性方程组(∗)的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

有s个主元，等于未知量个数，(∗)只有0解.

即只有当$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$时，才可以使得(∗)成立，

即，只有当$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$时，才可以使

$$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0$$

成立，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

而齐次线性方程组$(*)$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

有s个主元，等于未知量个数，$(*)$只有0解.

即只有当$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$时，才可以使得$(*)$成立，

即，只有当$x_1=x_2=\cdots=x_s=0$时，才可以使

$$x_1\alpha_1+x_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+x_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0$$

成立，所以$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\ldots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$线性无关.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

10.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1, k_2, k_3$，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$成立.

由于k_1, k_2, k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3 \neq 0$，或者$k_3 = 0, k_2 \neq 0$，或者$k_3 = k_2 = 0, k_1 \neq 0$.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

由于k_1,k_2,k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3\neq 0$，或者$k_3=0,k_2\neq 0$，或者$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$.

若$k_3\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得
$\alpha_3=(-\frac{k_1}{k_3})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_3})\alpha_2$，这与$\alpha_3$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾；

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

由于k_1,k_2,k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3\neq 0$，或者$k_3=0,k_2\neq 0$，或者$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$.

若$k_3\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_3=(-\frac{k_1}{k_3})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_3})\alpha_2$，这与$\alpha_3$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾；

若$k_3=0,k_2\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_2=(-\frac{k_1}{k_2})\alpha_1$，这与$\alpha_2$不能由$\alpha_1$线性表出矛盾；

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

由于k_1,k_2,k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3\neq 0$，或者$k_3=0,k_2\neq 0$，或者$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$.

若$k_3\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_3=(-\frac{k_1}{k_3})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_3})\alpha_2$，这与$\alpha_3$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾；

若$k_3=0,k_2\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_2=(-\frac{k_1}{k_2})\alpha_1$，这与$\alpha_2$不能由$\alpha_1$线性表出矛盾；

若$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$k_1\alpha_1=0,\alpha_1=0$，这与$\alpha_1\neq 0$矛盾.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

由于k_1,k_2,k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3\neq 0$，或者$k_3=0,k_2\neq 0$，或者$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$.

若$k_3\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得
$\alpha_3=(-\frac{k_1}{k_3})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_3})\alpha_2$，这与$\alpha_3$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾；

若$k_3=0,k_2\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得
$\alpha_2=(-\frac{k_1}{k_2})\alpha_1$，这与$\alpha_2$不能由$\alpha_1$线性表出矛盾；

若$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得
$k_1\alpha_1=0,\alpha_1=0$，这与$\alpha_1\neq 0$矛盾.

综上，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

10.证明 采用反证法.假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$成立.

由于k_1,k_2,k_3不全为0，所以只有三种情况：$k_3\neq 0$，或者$k_3=0,k_2\neq 0$，或者$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$.

若$k_3\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_3=(-\frac{k_1}{k_3})\alpha_1+(-\frac{k_2}{k_3})\alpha_2$，这与$\alpha_3$不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾；

若$k_3=0,k_2\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$\alpha_2=(-\frac{k_1}{k_2})\alpha_1$，这与$\alpha_2$不能由$\alpha_1$线性表出矛盾；

若$k_3=k_2=0,k_1\neq 0$，则由$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$可得$k_1\alpha_1=0,\alpha_1=0$，这与$\alpha_1\neq 0$矛盾.

综上，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

注：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中，向量$\alpha_1\neq 0$ 且任何一个向量都不能由它前面的向量线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

11.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

习题3.3($P_{115} - P_{118}$)

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s+(x_1+x_2+\cdots+x_s)\beta=0, \qquad (*)$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s+(x_1+x_2+\cdots+x_s)\beta=0, \qquad (*)$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s+(x_1+x_2+\cdots+x_s)\beta=0,\qquad (*)$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关，所以由$(*)$式，得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_s=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_s=0 \end{cases}$$

习题3.3$(P_{115}-P_{118})$

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s+(x_1+x_2+\cdots+x_s)\beta=0, \qquad (*)$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关，所以由$(*)$式，得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_s=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_s=0 \end{cases}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

11.证明 考虑组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+x_s(\alpha_s+\beta)=0,$$

即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s+(x_1+x_2+\cdots+x_s)\beta=0, \qquad (*)$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性无关，所以由$(*)$式，得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_s=0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_s=0 \end{cases}$$

所以$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_s+\beta$也线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

12.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

12.证明 假设$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关，考虑组合 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$,

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

12.证明 假设$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,...,\beta-\alpha_s$线性无关，考虑组合$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$，由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，则

$$\begin{array}{rl} & x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s \\ = & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1) \\ & +\frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2) \\ & +\cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s) \end{array},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

12.证明 假设$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\dots,\beta-\alpha_s$线性无关，考虑组合$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$，由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，则

$$\begin{array}{rl} & x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s \\ = & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1) \\ & +\frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2) \\ & +\cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s) \end{array},$$

所以

$$\begin{array}{l} x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0\Leftrightarrow \\ \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1)+ \\ \frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2)+ \\ \cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s)=0 \end{array},$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

12.证明 假设$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,...,\beta-\alpha_s$线性无关，考虑组合 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$，由$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，则

$$\begin{array}{rl} & x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s \\ = & \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1) \\ & +\frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2) \\ & +\cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s) \end{array},$$

所以

$$\begin{array}{l} x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0\Leftrightarrow \\ \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1)+ \\ \frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2)+ \\ \cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s)=0 \end{array},$$

而$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,...,\beta-\alpha_s$线性无关，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

所以

$$\frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1)+$$
$$\frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2)+$$
$$\cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s)=0$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

所以

$$\frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_1)+ \\ \frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s](\beta-\alpha_2)+ \\ \cdots+\frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s](\beta-\alpha_s)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s-1}[(2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s]=0 \\ \frac{1}{s-1}[x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s]=0 \\ \vdots \\ \frac{1}{s-1}[x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s]=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2-s)x_1+x_2+\cdots+x_s=0 \\ x_1+(2-s)x_2+\cdots+x_s=0 \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+(2-s)x_s=0 \end{cases} \quad (*)$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2-s & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-s & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-s \end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2-s & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-s & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-s \end{pmatrix},$$

在$s\neq 1$时，系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(*)$只有0解，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2-s & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-s & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-s \end{pmatrix},$$

在$s\neq 1$时，系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(*)$只有0解，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，考虑组合

$$x_1(\beta-\alpha_1)+x_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+x_s(\beta-\alpha_s)=0,$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$(*)$的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2-s & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2-s & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2-s\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1-s & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-s\end{pmatrix},$$

在$s\neq 1$时，系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(*)$只有0解，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，考虑组合

$$x_1(\beta-\alpha_1)+x_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+x_s(\beta-\alpha_s)=0,$$

由于$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，所以

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$$
\begin{aligned}
& x_1(\beta-\alpha_1)+x_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+x_s(\beta-\alpha_s)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x_2+x_3+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_1+x_3+\cdots+x_s)\alpha_2 \\
& +\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{s-1})\alpha_s=0 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} x_2+x_3+\cdots+x_s=0 \\ x_1+x_3+\cdots+x_s=0 \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{s-1}=0 \end{cases} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$$
\begin{aligned}
& x_1(\beta-\alpha_1)+x_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+x_s(\beta-\alpha_s)=0\\
\Leftrightarrow\ & (x_2+x_3+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_1+x_3+\cdots+x_s)\alpha_2\\
& +\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{s-1})\alpha_s=0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} x_2+x_3+\cdots+x_s=0\\ x_1+x_3+\cdots+x_s=0\\ \vdots\\ x_1+x_2+\cdots+x_{s-1}=0 \end{cases} \qquad (**)
$$

$(**)$系数矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

$$
\begin{aligned}
& x_1(\beta-\alpha_1)+x_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+x_s(\beta-\alpha_s)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x_2+x_3+\cdots+x_s)\alpha_1+(x_1+x_3+\cdots+x_s)\alpha_2 \\
& +\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{s-1})\alpha_s=0 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} x_2+x_3+\cdots+x_s=0 \\ x_1+x_3+\cdots+x_s=0 \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{s-1}=0 \end{cases} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

$(**)$系数矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}
$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s\ (*)$成立.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq 0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq 0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

所以α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表出.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,\ldots,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq 0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

所以α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表出.

假设α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq 0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

所以α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表出.

假设α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，则存在系数$k_1,k_2,...,k_{s-1}$，使得$\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\dots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq 0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

所以α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表出.

假设α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，则存在系数$k_1,k_2,...,k_{s-1}$，使得$\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$.

再由$(*)$，则$\beta=(l_1+l_sk_1)\alpha_1+\cdots+(l_{s-1}+l_sk_{s-1})\alpha_{s-1}$，这也与已知矛盾.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

系数矩阵的阶梯形中主元个数为s，$(**)$只有0解，所以$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_s$线性无关.

13.证明 因为β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$线性表出，所以存在系数$l_1,l_2,...,l_s$，使$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}+l_s\alpha_s$ $(*)$成立.

若$l_s=0$，则$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_{s-1}\alpha_{s-1}$，

即，β可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，这与已知矛盾.

所以$l_s\neq0$，则由$(*)$得$\alpha_s=-\frac{l_1}{l_s}\alpha_1-\cdots-\frac{l_{s-1}}{l_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{l_s}\beta$，

所以α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$线性表出.

假设α_s可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出，则存在系数$k_1,k_2,...,k_{s-1}$，使得$\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$.

再由$(*)$，则$\beta=(l_1+l_sk_1)\alpha_1+\cdots+(l_{s-1}+l_sk_{s-1})\alpha_{s-1}$，这也与已知矛盾.

所以，α_s不可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出.

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

14.证明

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

14.证明 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

14.证明 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

14.证明 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵A的阶梯形中有3个主元，其列向量线性无关，

习题3.3($P_{115}-P_{118}$)

14.证明 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵A的阶梯形中有3个主元，其列向量线性无关，

即对任意的a,b,c，都有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com