线性代数
第五章：矩阵的等价、相似与合同

宿州学院　数学与统计学院

目录

1 5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = \ & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，即，$a_{kk} = b_{kk}$.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \; & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，即，$a_{kk} = b_{kk}$.

a_{ij}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中交叉项 x_ix_j系数的一半，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \ & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，即，$a_{kk} = b_{kk}$.

a_{ij}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中交叉项 x_ix_j系数的一半，

即，$a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij},\ i < j,\ i, j = 1, 2, ..., n.$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) = \quad & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\
& + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\
& \vdots \\
& + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，即，$a_{kk} = b_{kk}$.

a_{ij}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中交叉项 x_ix_j系数的一半，

即，$a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij}$, $i < j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. 令$a_{ji} = a_{ij}$.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的实系数二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \ & b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + \cdots + b_{1n}x_1x_n \\ & + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2n}x_2x_n \\ & \vdots \\ & + b_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1n}x_{n-1}x_n + b_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为关于字母$x_1, x_2, ..., x_n$的n元实二次型.

记a_{kk}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中x_k^2项的系数，即，$a_{kk} = b_{kk}$.

a_{ij}为$f(x_1, x_2, ..., x_n)$中交叉项 x_ix_j系数的一半，

即，$a_{ij} = \frac{1}{2}b_{ij}$, $i < j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. 令$a_{ji} = a_{ij}$.

以a_{ij}为元素构作矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

则，A是一个n阶实对称矩阵，且由$f(x_1, x_2, ..., x_n)$的系数唯一确定.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

则，A是一个n阶实对称矩阵，且由$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的系数唯一确定.称为二次型$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

则，A是一个n阶实对称矩阵，且由$f(x_1,x_2,...,x_n)$的系数唯一确定.称为二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)$ 的矩阵.

记$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

$$X^TAX=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& +a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& +a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n} + a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n} + a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).
\end{aligned}
$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & \Big(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big).
\end{aligned}
$$

把一阶方阵$\Big(a\Big)$与a等同看待，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).
\end{aligned}
$$

把一阶方阵$\left(a\right)$与a等同看待，

则$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX$，其中矩阵$A$为二次型的矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& +a_{22}x_2^2 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3 + \cdots + (a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& +a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & \Big(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\Big).
\end{aligned}
$$

把一阶方阵(a)与a等同看待，

则$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X^TAX$，其中矩阵$A$为二次型的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2,$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+\cdots+(a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& +a_{22}x_2^2+(a_{23}+a_{32})x_2x_3+\cdots+(a_{2n}+a_{n2})x_2x_n \\
& \vdots \\
& +a_{n-1n-1}x_{n-1}^2+(a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n+a_{nn}x_n^2 \\
= \quad & \left(f(x_1,x_2,...,x_n)\right).
\end{aligned}
$$

把一阶方阵$\left(a\right)$与a等同看待，

则$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，其中矩阵A为二次型的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2,$$

矩阵表示：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2,$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$，矩阵表示：

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$，矩阵表示：

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

只含平方项的二次型

$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 是实二次型中的最简形式，用矩阵表示

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

问题是：任意给定的n元实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$，能否找到适当的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

问题是：任意给定的n元实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$，能否找到适当的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

化二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$成只含平方项的$g(y_1, y_2, ..., y_n)$?

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

问题是：任意给定的n元实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$，能否找到适当的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

化二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$成只含平方项的$g(y_1, y_2, ..., y_n)$?

回答是：

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

问题是：任意给定的n元实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$，能否找到适当的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

化二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$成只含平方项的$g(y_1, y_2, ..., y_n)$?

回答是：能！

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

问题是：任意给定的n元实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$，能否找到适当的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases},$$

化二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$成只含平方项的$g(y_1, y_2, ..., y_n)$?

回答是：能！利用实对称矩阵的特性，能给出问题的答案.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

则可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

记

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

则可逆的线性变换

$$\begin{cases}x_1= & c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\x_2= & c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\\vdots & \vdots\\x_n= & c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

可以表示为$X=CY$.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

所谓可逆线性变换，是指在线性变换$X=CY$中，每给一组$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的值，都能唯一确定一组$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$的值，而且每给一组$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$的值，都能唯一确定一组$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的值.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

所谓可逆线性变换，是指在线性变换$X = CY$中，每给一组$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$的值，都能唯一确定一组$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$的值，而且每给一组$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$的值，都能唯一确定一组$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$的值.

由线性方程组的知识知道，线性变换$X = CY$可逆当且仅当C是可逆矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$$(C^TAC)^T=$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，即C^TAC是实二次型$g(y_1,y_2,...,y_n)$的矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，即C^TAC是实二次型$g(y_1,y_2,...,y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，即C^TAC是实二次型$g(y_1,y_2,...,y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，即C^TAC是实二次型$g(y_1,y_2,...,y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & y_1 - y_2 \\ x_2 = & y_2 - y_3 \\ x_3 = & y_3 \end{cases},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

可逆线性变换$X=CY$化$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$，得

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(CY)^TA(CY)=Y^T(C^TAC)Y=g(y_1,y_2,...,y_n)$$

$(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TAC$ 是实对称矩阵，即C^TAC是实二次型$g(y_1,y_2,...,y_n)$的矩阵.

例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = & y_1-y_2 \\ x_2 = & y_2-y_3 \\ x_3 = & y_3 \end{cases}，\text{即，}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

代入原实二次型，则 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

代入原实二次型，则$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

代入原实二次型，则$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

代入原实二次型，则$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

代入原实二次型，则 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

即，可逆线性变换 $\begin{cases} x_1 = & y_1 - y_2 \\ x_2 = & y_2 - y_3 \\ x_3 = & y_3 \end{cases}$ 代入实二次型

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$,

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化为关于字母y_1, y_2, y_3 且只含平方项的实二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化为关于字母y_1, y_2, y_3 且只含平方项的实二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型$X^T AX$为只含平方项的标准形，就是使得 $Y^T(C^T AC)Y$只含平方项，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化为关于字母y_1, y_2, y_3 且只含平方项的实二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就是使得 $Y^T(C^TAC)Y$只含平方项，即，求可逆矩阵C，使得C^TAC为对角矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化为关于字母y_1, y_2, y_3 且只含平方项的实二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就是使得 $Y^T(C^TAC)Y$只含平方项，即，求可逆矩阵C，使得C^TAC为对角矩阵.

即，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就相当于就可逆矩阵C，使得实对称矩阵A在变换C之下，化为对角阵 C^TAC.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化为关于字母y_1, y_2, y_3 且只含平方项的实二次型

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就是使得 $Y^T(C^TAC)Y$只含平方项，即，求可逆矩阵C，使得C^TAC为对角矩阵.

即，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型X^TAX为只含平方项的标准形，就相当于就可逆矩阵C，使得实对称矩阵A在变换C之下，化为对角阵 C^TAC.

因而，化实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$为只含平方项的标准形问题，实际上就是在合同意义下，求可逆矩阵C，化二次型的矩阵A对对角形矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X = CY$并不唯一.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X = CY$并不唯一.

例如 实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X = CY$并不唯一.

例如 实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$之下，化为$y_1^2 + y_2^2$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X = CY$并不唯一.

例如 实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$之下，化为$y_1^2 + y_2^2$；

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X = CY$并不唯一.

例如 实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

在$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$之下，化为$y_1^2 + y_2^2$；

在$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + 2y_2 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$之下，化为$4y_2^2 + y_3^2$；

不同的可逆线性变换化同一个二次型的标准形可能不同，但合同矩阵有相同的秩，对角阵的秩等于非零对角元的个数。

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

化实二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$为只含平方项的标准形的可逆线性变换$X=CY$并不唯一.

例如 实二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$$

在$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 之下，化为$y_1^2+y_2^2$；

在$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-y_1+2y_2 \\ x_3=y_1-2y_2+y_3 \end{cases}$ 之下，化为$4y_2^2+y_3^2$；

不同的可逆线性变换化同一个二次型的标准形可能不同，但合同矩阵有相同的秩，对角阵的秩等于非零对角元的个数。不同的可逆线性变换化同一个二次型为标准形时，非零项个数相同.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

不同的可逆线性变换化同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个数和负项的个数是唯一确定的.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

不同的可逆线性变换化同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个数和负项的个数是唯一确定的.

例如 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-x_3^2+2x_2x_3$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

不同的可逆线性变换化同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个数和负项的个数是唯一确定的.

例如 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-x_3^2+2x_2x_3$

在$\begin{cases} x_1=y_1+y_2+y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 之下，化为$y_1^2-y_2^2$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

不同的可逆线性变换化同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个数和负项的个数是唯一确定的.

例如 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-x_3^2+2x_2x_3$

在$\begin{cases} x_1=y_1+y_2+y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ 之下，化为$y_1^2-y_2^2$；

在$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_1-y_3 \\ x_3=y_1-y_2-y_3 \end{cases}$ 之下，化为$-y_2^2+y_3^2$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

不同的可逆线性变换化同一个二次型，得不同的标准形，且标准形中正项的个数和负项的个数是唯一确定的.

例如 实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-x_3^2+2x_2x_3$

在$\begin{cases} x_1=y_1+y_2+y_3 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$之下，化为$y_1^2-y_2^2$；

在$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_1-y_3 \\ x_3=y_1-y_2-y_3 \end{cases}$之下，化为$-y_2^2+y_3^2$

不同的可逆线性变换化同一个实二次型有两个非零平方项，且都是一个正项、一个负项.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

对实对称矩阵A，若所求可逆矩阵C是正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^TAC,$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

对实对称矩阵A，若所求可逆矩阵C是正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^{T}AC,$$

且，实对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C^{-1}AC = C^{T}AC$是对角矩阵，且C的列向量是A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元是矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

对实对称矩阵A，若所求可逆矩阵C是正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^TAC,$$

且，实对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C^{-1}AC = C^TAC$是对角矩阵，且C的列向量是A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元是矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

由实例，给出求可逆的线性变换，化实二次型为标准形的步骤和方法.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

对实对称矩阵A，若所求可逆矩阵C是正交矩阵，则

$$C^{-1}AC = C^TAC,$$

且，实对称矩阵A，存在正交矩阵C，得$C^{-1}AC = C^TAC$是对角矩阵，且C的列向量是A的两两正交的单位特征向量，而对角阵的对角元是矩阵C的列作为特征向量对应的特征值.

由实例，给出求可逆的线性变换，化实二次型为标准形的步骤和方法.

例5.5 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&-1\\-1&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&-1\\-1&0&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&-1\\-1&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&-1\\-1&0&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2)$$

A的特征值是$\lambda_1=0$(二重)，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$为其基础解系，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_1=0$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{，}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{为其基础}$$

解系，实对称矩阵A属于特征值$\lambda_1=0$线性无关的特征向量为

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_1 = 0$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$为其基础

解系，实对称矩阵A属于特征值$\lambda_1 = 0$线性无关的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$，且正交，需单位化，得 $$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_2 = 2$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\text{得基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

属于特征值$\lambda_2=2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_2=2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，得基础解系$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

属于特征值$\lambda_2=2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

单位化得$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_3=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&-1\\-1&-2&-1&0\\0&-1&-2&-1\\-1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}，得基础解系\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_3=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-2&-1&0&-1\\-1&-2&-1&0\\0&-1&-2&-1\\-1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$，得基础解系$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

属于特征值$\lambda_3=-2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

特征值$\lambda_3=-2$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，得基础解系\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

属于特征值$\lambda_3=-2$的线性无关的特征向量为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

单位化得$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

则

$$C^{-1}AC = C^TAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

则

$$C^{-1}AC=C^TAC=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

即，存在可逆的线性变换$X=CY$，代入原二次型化得

$$2y_3^2-2y_4^2$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

例5.6 设

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

例5.6 设

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

例5.6 设

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

例5.6 设

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4)$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

例5.6 设

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2,$$

求可逆的线性变换，化其为标准形.

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

A的全部特征值为$\lambda_1=5$(二重)，$\lambda_2=-4$.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$\lambda_1 = 5$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$\lambda_1 = 5$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{有基础解系} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A属于特征值$\lambda_1 = 5$有两个线性无关的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$\lambda_1=5$代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，有基础解系$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

A属于特征值$\lambda_1=5$有两个线性无关的特征向量

$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，施密特正交化并单位化，得矩阵$A$属于特征值$\lambda_1=5$的两个正交的单位特征向量$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{2\sqrt{5}}{15}\\-\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$。

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$\lambda_2 = -4$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$\lambda_2 = -4$代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

有基础解系$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，单位化得$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

则

$$C^{-1}AC = C^{T}AC = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

构作矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

则

$$C^{-1}AC=C^TAC=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

即，存在可逆线性变换$X=CY$，化原二次型为

$$5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2.$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$的矩阵，以矩阵形式表示二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$的矩阵，以矩阵形式表示二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$；

(2) 求实对称矩阵A的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X=CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)$的矩阵，以矩阵形式表示二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$；

(2) 求实对称矩阵A的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$；

(3) 将每一个特征值λ_k代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$，求出其基础解系 $\eta_{k1},\eta_{k2},...,\eta_{kt_k}$，$k=1,2,...,s$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$的矩阵，以矩阵形式表示二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$；

(2) 求实对称矩阵A的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$；

(3) 将每一个特征值λ_k代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，求出其基础解系 $\eta_{k1}, \eta_{k2}, ..., \eta_{kt_k}$，$k = 1, 2, ..., s$；

(4) 利用施密特正交化方法，将$\eta_{k1}, \eta_{k2}, ..., \eta_{kt_k}$正交化，再单位化，得规范正交单位向量 $\delta_{k1}, \delta_{k2}, ..., \delta_{kt_k}$，$k = 1, 2, ..., s$；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

综上，求可逆的线性变换$X = CY$化实二次型为标准形的方法步骤.

(1) 写出二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$的矩阵，以矩阵形式表示二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$；

(2) 求实对称矩阵A的特征多项式，进而求出其所有的不同特征值$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$；

(3) 将每一个特征值λ_k代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = 0$，求出其基础解系 $\eta_{k1}, \eta_{k2}, ..., \eta_{kt_k}$, $k = 1, 2, ..., s$；

(4) 利用施密特正交化方法，将$\eta_{k1}, \eta_{k2}, ..., \eta_{kt_k}$正交化，再单位化，得规范正交单位向量 $\delta_{k1}, \delta_{k2}, ..., \delta_{kt_k}$, $k = 1, 2, ..., s$；

(5) 以$\delta_{11}, \delta_{12}, ..., \delta_{1t_1}, \delta_{21}, \delta_{22}, ..., \delta_{2t_2}, ..., \delta_{s1}, \delta_{s2}, ..., \delta_{st_s}$为列向量构作矩阵$C$，则$C$是正交矩阵，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

且

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

且

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

(6)构作可逆线性变换$X = CY$，
则将二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$化为标准形，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

且

$$C^TAC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix};$$

(6)构作可逆线性变换$X = CY$，
则将二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$化为标准形，且标准形是

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_1 y_{t_1}^2 + \cdots + \lambda_s y_{t_1+\cdots+t_{s-1}+1}^2 + \cdots + \lambda_s y_n^2.$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

$$取\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

取$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值$f(c_1, c_2, ..., c_n)$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

取 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值$f(c_1, c_2, ..., c_n)$，即，

$$f(c_1, c_2, ..., c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

取$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$，即，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，将其带入到二次型中，得二次型的值$f(c_1, c_2, ..., c_n)$，即，

$$f(c_1, c_2, ..., c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

，称为实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$在$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$时的值.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ 为**正定二次型**，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$ 为正定二次型，对应的实对称矩阵A称为正定矩阵.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，对应的实对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元实二次型

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2,$$

其正定当且仅当$d_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，对应的实对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元实二次型

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2,$$

其正定当且仅当$d_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$

实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$化为二次型$g(y_1, y_2, ..., y_n)$，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$ 为正定二次型，对应的实对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元实二次型

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2,$$

其正定当且仅当$d_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$

实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$化为二次型$g(y_1, y_2, ..., y_n)$，则

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$正定当且仅当$g(y_1, y_2, ..., y_n)$正定，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

若对任意不全为0的$c_1, c_2, ..., c_n$，都有$f(c_1, c_2, ..., c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$ 为正定二次型，对应的实对称矩阵A称为正定矩阵.

只含平方项的n元实二次型

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2,$$

其正定当且仅当$d_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$

实二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$经可逆的线性变换$X = CY$化为二次型$g(y_1, y_2, ..., y_n)$，则

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)\text{正定当且仅当}g(y_1, y_2, ..., y_n)\text{正定，}$$

即，可逆线性变换不改变二次型的正定性.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵A的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的或者0特征值，则不正定.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1,x_2,...,x_n)=X^TAX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵A的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的或者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不是正定二次型.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的或者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不是正定二次型.

再看一个例子.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

n元二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^TAX$正定当且仅当其对应的实对称矩阵$A$的特征值全大于0.

即，实对称矩阵A正定，当且仅当矩阵A的特征值全大于0.

判断一个实二次型是否正定，只要求出实二次型对应的实对称矩阵的特征值，若特征值全大于0，则二次型正定；若特征值中存在负的或者0特征值，则不正定.

例如，例5.5、例5.6所给二次型都不是正定二次型.

再看一个例子.

例5.7 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2$$

是三元实二次型，问t取什么值时，是正定二次型.

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -t & 0 \\ -t & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -t & 0\\ -t & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -t & 0 \\ -t & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4 - t^2)$$

有三个特征值$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2},\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -t & 0\\ -t & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2},\ \lambda_3=\frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要使得$f(x_1,x_2,x_3)$正定，必须且只需$\begin{cases}\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2}>0\\ \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}>0\end{cases}$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -t & 0\\ -t & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2},\ \lambda_3=\frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要使得$f(x_1,x_2,x_3)$正定，必须且只需$\begin{cases}\frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2}>0\\ \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}>0\end{cases}$

解得，$-2<t<2.$

5.4 矩阵合同对角化的应用——实二次型

解 二次型对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

它的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -t & 0 \\ -t & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4-t^2)$$

有三个特征值$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2},\ \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2}$

要使得$f(x_1,x_2,x_3)$正定，必须且只需$\begin{cases} \frac{5+\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0 \\ \frac{5-\sqrt{9+4t^2}}{2} > 0 \end{cases}$

解得，$-2 < t < 2$. 即$-2 < t < 2$时，$f(x_1,x_2,x_3)$正定.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com