线性代数
第五章：矩阵的等价、相似与合同

宿州学院　数学与统计学院

目录

5.2 矩阵的对角化

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩阵P 和对角矩阵D ，使得$P^{-1}AP=D$.

5.2 矩阵的对角化

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩阵P 和对角矩阵D ，使得$P^{-1}AP=D$.

本节将给出矩阵A 所要满足的条件，并给出可逆矩阵P 和对角矩阵D 的求法.

5.2 矩阵的对角化

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩阵P 和对角矩阵D ，使得$P^{-1}AP=D$.

本节将给出矩阵A 所要满足的条件，并给出可逆矩阵P 和对角矩阵D 的求法.

设对角矩阵$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$，并将可逆矩阵$P$进行列分块。记$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \cdots\ \ \eta_n)$，

5.2 矩阵的对角化

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，即，存在可逆矩阵P 和对角矩阵D ，使得$P^{-1}AP=D$.

本节将给出矩阵A 所要满足的条件，并给出可逆矩阵P 和对角矩阵D 的求法.

设对角矩阵$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$，并将可逆矩阵$P$进行列分块。记$P=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \cdots\ \ \eta_n)$，即，$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$是可逆矩阵$P$ 的第1 至第n 列对应的列向量，它们是线性无关的.

由$P^{-1}AP=D$，则$AP=PD$，即

$$A(\eta_1\ \ \cdots\ \ \eta_n)=(\eta_1\ \ \cdots\ \ \eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1 \;\; A\eta_2 \;\; \cdots \;\; A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \;\; \lambda_2\eta_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\eta_n),$$

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \ \ \cdots \ \ A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_n\eta_n),$$

从而对任意的$1 \leq k \leq n$，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1 \;\; A\eta_2 \;\; \cdots \;\; A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \;\; \lambda_2\eta_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n\eta_n),$$

从而对任意的$1 \leq k \leq n$ ，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

即，若矩阵A 可以对角化，则矩阵A和对角矩阵D 的对角元素与可逆矩阵P的列向量之间必满足关系式(1).

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1\ \ A\eta_2\ \ \cdots\ \ A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1\ \ \lambda_2\eta_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n\eta_n),$$

从而对任意的$1 \le k \le n$，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

即，若矩阵A 可以对角化，则矩阵A和对角矩阵D 的对角元素与可逆矩阵P的列向量之间必满足关系式(1).

定义5.5

5.2 矩阵的对角化

依据分块矩阵的乘法，

$$(A\eta_1 \ \ A\eta_2 \ \ \cdots \ \ A\eta_n) = (\lambda_1\eta_1 \ \ \lambda_2\eta_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_n\eta_n),$$

从而对任意的$1 \leq k \leq n$，都有

$$A\eta_k = \lambda_k\eta_k \qquad (1)$$

即，若矩阵A 可以对角化，则矩阵A和对角矩阵D 的对角元素与可逆矩阵P的列向量之间必满足关系式(1).

定义5.5 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若存在非0 向量η 和数λ，满足$A\eta=\lambda\eta$，则称λ 是矩阵A 的一个特征值，η 是矩阵A 属于特征值λ 的特征向量.

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵 A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ ，且特征向量η_k 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P ，则

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$AP$$

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$AP \quad = A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n)$$

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$AP = A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n) = (A\eta_1\ A\eta_2\ \cdots\ A\eta_n)$$

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$AP = A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n) = (A\eta_1\ A\eta_2\ \cdots\ A\eta_n)$$

$$= (\lambda_1\eta_1\ \ \lambda_2\eta_2\ \cdots\ \lambda_n\eta_n)$$

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n) &&= (A\eta_1\ A\eta_2\ \cdots\ A\eta_n) \\
&= (\lambda_1\eta_1\ \ \lambda_2\eta_2\ \cdots\ \lambda_n\eta_n) &&= (\eta_1\ \cdots\ \eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.2 矩阵的对角化

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以对角化，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$ 为对角阵，即，$A\eta_k=\lambda_k\eta_k$，P 的列向量是矩阵A的n个线性无关的特征向量.

若A 有n 个线性无关的特征向量，记为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，且特征向量$\eta_k$ 相应的特征值为λ_k，以$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 为列向量构作矩阵 P，则

$$\begin{aligned} AP &= A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n) &&= (A\eta_1\ A\eta_2\ \cdots\ A\eta_n) \\ &= (\lambda_1\eta_1\ \ \lambda_2\eta_2\ \cdots\ \lambda_n\eta_n) &&= (\eta_1\ \cdots\ \eta_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

5.2 矩阵的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$ ，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩阵A 相似于对角阵，矩阵A可以对角化.

5.2 矩阵的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩阵A 相似于对角阵，矩阵A可以对角化.

定理5.3

5.2 矩阵的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$ ，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩阵A 相似于对角阵，矩阵A可以对角化.

定理5.3设$A = (a_{ij})_{n\times n}$ ，则矩阵A 可以对角化的充要条件是矩阵A 有n 个线性无关特征向量.

5.2 矩阵的对角化

P 的列向量线性无关，$\det P \neq 0$ ，P 可逆，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

即，矩阵A 相似于对角阵，矩阵A可以对角化.

定理5.3设$A = (a_{ij})_{n\times n}$ ，则矩阵A 可以对角化的充要条件是矩阵A 有n 个线性无关特征向量.

设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是矩阵A 分别属于特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 的n 个线性无关的特征向量. 以$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为列向量构作矩阵P ，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. 称为矩阵$A$ 的相似标准形.

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是否可以对角化，首先求出矩阵A 全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是否可以对角化，首先求出矩阵A 全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

定理5.4

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是否可以对角化，首先求出矩阵A 全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

定理5.4设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，η_1 是矩阵A 属于特征值λ_1 的特征向量，η_2 是矩阵A 属于特征值λ_2的特征向量。

若$\lambda_1\neq\lambda_2$ ，则η_1,η_2 线性无关.

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是否可以对角化，首先求出矩阵A 全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

定理5.4设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，η_1 是矩阵A 属于特征值λ_1 的特征向量，η_2 是矩阵A 属于特征值λ_2的特征向量。

若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则η_1,η_2 线性无关.

即，矩阵A 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是否可以对角化，首先求出矩阵A全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

定理5.4设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，η_1是矩阵A属于特征值λ_1的特征向量，η_2是矩阵A属于特征值λ_2的特征向量。

若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则η_1,η_2线性无关.

即，矩阵A属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

定理5.5

5.2 矩阵的对角化

由定理5.3，判定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是否可以对角化，首先求出矩阵A全部的特征值与特征向量，然后判定线性无关的特征向量个数是否为A的阶数n.

定理5.4设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，η_1是矩阵A属于特征值λ_1的特征向量，η_2是矩阵A属于特征值λ_2的特征向量。

若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则η_1,η_2线性无关.

即，矩阵A属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

定理5.5若矩阵A有n个互不相同的特征值，则A一定可以对角化.

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta,$$

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n - A)\eta = 0,$$

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n - A)\eta = 0,$$

即，η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$的非零解.

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta=\lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta=(\lambda_0 I_n)\eta,\quad (\lambda_0 I_n-A)\eta=0,$$

即，η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解.

若η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解，

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta=\lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta=(\lambda_0 I_n)\eta,\quad (\lambda_0 I_n-A)\eta=0,$$

即，η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解.

若η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n-A)\eta=0,\quad A\eta=\lambda_0\eta,$$

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta=\lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta=(\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n-A)\eta=0,$$

即，η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解.

若η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n-A)X=0$的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n-A)\eta=0, \quad A\eta=\lambda_0\eta,$$

即，η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量。

5.2 矩阵的对角化

矩阵的特征值与特征向量的求法.

假设η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量，即$A\eta = \lambda_0\eta$.由数积与矩阵乘积之间的关系，则

$$A\eta = (\lambda_0 I_n)\eta, \quad (\lambda_0 I_n - A)\eta = 0,$$

即，η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$的非零解.

若η 是齐次线性方程组$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$的非零解，则

$$(\lambda_0 I_n - A)\eta = 0, \quad A\eta = \lambda_0\eta,$$

即，η 是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量。

使$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$ 有非0 解的λ_0 就是特征值.

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ ，

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，称$\det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A|$ 为矩阵A 的特征多项式.

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，称$\det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A|$ 为矩阵A 的特征多项式.

矩阵A 的特征值就是A 的特征多项式的根.所以，矩阵的特征值与特征向量可以按如下步骤求得

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，称$\det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A|$ 为矩阵A 的特征多项式.

矩阵A 的特征值就是A 的特征多项式的根.所以，矩阵的特征值与特征向量可以按如下步骤求得

(1)求特征值.计算矩阵A 的特征多项式$\det(\lambda I_n - A)$，并求$\det(\lambda I_n - A) = 0$ 的根. 即得矩阵A 的全部不同特征值，设为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ ；

5.2 矩阵的对角化

由4.3节的推论4.2，$(\lambda_0 I_n - A)X = 0$有非0 解的充要条件是其系数行列式$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$，所以矩阵$A$ 的特征值就是满足$\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$ 的λ_0 .

定义5.6 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，称$\det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A|$ 为矩阵A 的特征多项式.

矩阵A 的特征值就是A 的特征多项式的根.所以，矩阵的特征值与特征向量可以按如下步骤求得

(1)求特征值.计算矩阵A 的特征多项式$\det(\lambda I_n - A)$，并求$\det(\lambda I_n - A) = 0$ 的根. 即得矩阵A 的全部不同特征值，设为$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$;

(2)求特征向量.将$\lambda = \lambda_k$ 代入方程组$(\lambda I_n - A)X = 0$，求基础解系.求得矩阵A 属于特征值λ_k 的t_k 个线性无关的特征向量，设为$\eta_{k1}, \eta_{k2}, ..., \eta_{kt_k}$.

5.2 矩阵的对角化

得到矩阵A 的全部线性无关特征向量

$$\eta_{11}, \dots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \dots, \eta_{2t_2}, \dots, \eta_{s1}, \dots, \eta_{st_s}.$$

5.2 矩阵的对角化

得到矩阵A 的全部线性无关特征向量

$$\eta_{11},\dots,\eta_{1t_1},\eta_{21},\dots,\eta_{2t_2},\dots,\eta_{s1},\dots,\eta_{st_s}.$$

(3)判定.若$t_1+t_2+\cdots+t_s<n$，A 线性无关的特征向量个数小于n，矩阵A 不能对角化；

若$t_1+t_2+\cdots+t_s=n$，A可以对角化.(A为$n\times n$阶矩阵).

5.2 矩阵的对角化

得到矩阵A 的全部线性无关特征向量

$$\eta_{11},\dots,\eta_{1t_1},\eta_{21},\dots,\eta_{2t_2},\dots,\eta_{s1},\dots,\eta_{st_s}.$$

(3)判定.若$t_1+t_2+\cdots+t_s<n$，A 线性无关的特征向量个数小于n，矩阵A 不能对角化；

若$t_1+t_2+\cdots+t_s=n$，A可以对角化.(A为$n\times n$阶矩阵).

(4)可对角化时，以A 的全部线性无关特征向量为列构作矩阵$P=(\eta_{11}\ \cdots\ \eta_{1t_1}\ \eta_{21}\ \cdots\ \eta_{2t_2}\ \cdots\ \eta_{s1}\ \cdots\ \eta_{st_s})$, 则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s}\end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

解

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A 可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D ，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2 - A|$$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A 可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2 - A| \quad = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6$$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A 可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D ，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-3)$$

A的全部特征值是$\lambda_1=2,\lambda_2=3.$

对特征值$\lambda_1=2$，$(2I_2-A)X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A 可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-3)$$

A的全部特征值是$\lambda_1=2, \lambda_2=3$.

对特征值$\lambda_1=2$，$(2I_2-A)X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$,

解方程组，$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow$

5.2 矩阵的对角化

例5.2设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，判定A可否对角化.

若可对角化，求可逆阵P、对角阵D，使$P^{-1}AP=D$.

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

A的全部特征值是$\lambda_1=2,\lambda_2=3.$

对特征值$\lambda_1=2$，$(2I_2-A)X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0,$

解方程组，$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于特征值$\lambda_2 = 3$，$(3I_2 - A)X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于特征值$\lambda_2 = 3$，$(3I_2 - A)X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于特征值$\lambda_2 = 3$，$(3I_2 - A)X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

对于特征值$\lambda_2 = 3$，$(3I_2 - A)X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$，

解方程组，$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

得基础解系$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

5.2 矩阵的对角化

得基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_1=2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

对于特征值$\lambda_2=3$，$(3I_2-A)X=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$，

解方程组，$\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$.

得基础解系$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

即，A 属于特征值$\lambda_2=3$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

A 有2 个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

5.2 矩阵的对角化

A 有2 个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

取$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵的对角化

A 有2 个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

取$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

例5.3

5.2 矩阵的对角化

A 有2 个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

取$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

例5.3 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$，求$A$ 的特征值与特征向量，并判定A 可否对角化.

若可对角化，求可逆矩阵P 和对角阵D ，使得$P^{-1}AP = D$.

5.2 矩阵的对角化

解

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A|$$

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

5.2 矩阵的对角化

解 A 的特征多项式

$$
\begin{aligned}
|\lambda I_3 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)^2(\lambda+6)
\end{aligned}
$$

A的全部特征值是$\lambda_1 = 3$(二重)，$\lambda_2 = -6$.

5.2 矩阵的对角化

特征值$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

5.2 矩阵的对角化

特征值$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

5.2 矩阵的对角化

特征值$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

特征值$\lambda_1 = 3$，解方程组

$$(3I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

有基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.2 矩阵的对角化

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2 = -6$，解方程组

$$(-6I_3 - A)X = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

5.2 矩阵的对角化

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2 = -6$ ，解方程组

$$(-6I_3 - A)X = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

5.2 矩阵的对角化

即，A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

特征值$\lambda_2 = -6$，解方程组

$$(-6I_3 - A)X = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

5.2 矩阵的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_2 = -6$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.2 矩阵的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_2 = -6$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A有3个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

5.2 矩阵的对角化

有基础解系$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

即，A 属于特征值$\lambda_2 = -6$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A有3个线性无关的特征向量，所以A 可以对角化.

取$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -6 \end{pmatrix}$

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1, η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$ ，若$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$ ，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1，η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$，若$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1, η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$，若$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

这是因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) =$$

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1，η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$ ，若$k\eta_1+l\eta_2\neq 0$ ，则$k\eta_1+l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

这是因为

$$A(k\eta_1+l\eta_2)=kA\eta_1+lA\eta_2=$$

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1, η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$ ，若$k\eta_1+l\eta_2\neq 0$ ，则$k\eta_1+l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

这是因为

$$A(k\eta_1+l\eta_2)=kA\eta_1+lA\eta_2=k\lambda_0\eta_1+l\lambda_0\eta_2=$$

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1, η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$ ，若$k\eta_1+l\eta_2\neq 0$ ，则$k\eta_1+l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

这是因为

$$A(k\eta_1+l\eta_2)=kA\eta_1+lA\eta_2=k\lambda_0\eta_1+l\lambda_0\eta_2=\lambda_0(k\eta_1+l\eta_2).$$

5.2 矩阵的对角化

特征值与特征向量的若干性质.

定理5.6设η_1, η_2是矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.对任意的$k.l$ ，若$k\eta_1 + l\eta_2 \neq 0$ ，则$k\eta_1 + l\eta_2$ 仍为矩阵A 属于特征值λ_0 的特征向量.

即，矩阵A 属于同一个特征值λ_0 的特征向量的非0 线性组合仍是λ_0 的特征向量.

这是因为

$$A(k\eta_1 + l\eta_2) = kA\eta_1 + lA\eta_2 = k\lambda_0\eta_1 + l\lambda_0\eta_2 = \lambda_0(k\eta_1 + l\eta_2).$$

属于特征值λ 的特征向量η 的非零数倍$k\eta$ 仍是属于特征值λ 的特征向量，而属于特征值λ 的特征向量η_1, η_2 的非零组合$k\eta_1 + l\eta_2$ 仍是属于特征值λ 的特征向量.

5.2 矩阵的对角化

所以，在例5.2中，矩阵A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的的全部特征向量是

$$\left\{ \; k\eta_1 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k \neq 0 \; \right\}.$$

5.2 矩阵的对角化

所以，在例5.2中，矩阵A 属于特征值$\lambda_1 = 2$ 的的全部特征向量是

$$\left\{ k\eta_1 = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k \neq 0 \right\}.$$

属于特征值$\lambda_2 = 3$ 的全部特征向量是

$$\left\{ k\eta_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k \neq 0 \right\}.$$

.

5.2 矩阵的对角化

例5.3中，矩阵A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量是

$$\left\{ k\eta_1 + l\eta_2 = \begin{pmatrix} -2k+2l \\ k \\ l \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k, l\text{不全为}0 \right\}.$$

5.2 矩阵的对角化

例5.3中，矩阵A 属于特征值$\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量是

$$\left\{ k\eta_1 + l\eta_2 = \begin{pmatrix} -2k+2l \\ k \\ l \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k, l\text{不全为}0 \right\}.$$

属于特征值$\lambda_2 = -6$ 的全部特征向量是

$$\left\{ k\eta_3 = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2k \end{pmatrix} \middle| \quad \forall k \neq 0 \right\}.$$

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com